

### 3 なぜZAがいいのか

膨張宇宙での構造形成に対して数多くの解析的近似法があるが、そのなかでも Zel'dovich 近似が準非線型領域においても大変精度のよい近似になっていることが知られている。最近では Zel'dovich 近似の拡張である Post-Zel'dovich 近似、Post-post Zel'dovich 近似（以下 PZA、PPZA とする。）も議論されてきた。Munshi et al. (1994) [6]、Sahni et al. (1996) [7]、Sahni et al. (1996) [8] Bouchet et al. (1995) [9] らによって球対称モデルにおいて、これらの Zel'dovich-type 近似法が他のどの近似法よりもよい近似になっていることが示された。しかしなぜ Zel'dovich-type 近似法がこのように有効なのかという疑問に対しては明白な説明はされてきておらず、よい近似法になっている理由は知られていない。よってその理由を解明したいわけであるが、厳密解を得ることができない一般的な系においてそのような議論をすることは非常に難しい。そこで一般になぜこれらの Zel'dovich-type 近似法がよい近似になっているのかを解明するためにここで以下の2つの点に注目して考える。

#### (1) 一次元厳密性

一次元的 (plane-parallel) な物質分布においては  $\delta = 1/(1 + \Psi') - 1$  となり、式 (2.17) と (2.18) は

$$\frac{d^2\Psi'}{dt^2} + 2H\frac{d\Psi'}{dt} = \frac{3}{2}H^2\Omega\Psi', \quad (3.1)$$

となる。実は Zel'dovich 近似はこの場合には、少なくとも shell crossing が起こるまでは厳密解になっているのである。この Zel'dovich 近似の持つ一次元厳密性が一般の三次元の系においても近似のよさを支持しているのであろうか。

#### (2) Lagrange 的描像

Zel'dovich-type 近似法は Lagrange 的描像に基づいているという点でその他の近似法と比べてユニークである。このことが Zel'dovich-type 近似法のよさに関係しているのであろうか。

これらのことを検証するためにはできるだけ解析的な議論が必要である。これまで Munshiet al. (1994) [6] たちによって唯一解析的厳密解を得ることができる球対称モデルにおいて、各近似法での解を比べることにより、Zel'dovich-type 近似が他のどの近似法よりもよい近似になっていることが示されてきたわけであるが、ここでは、上述の二つの視点で考察するために、一様回転楕円体（二軸相当）モデルの密度揺らぎの発展を考える。この一様回転楕円体モデルでは、解析的厳密解は得ることはできないわけであるが、よりシンプルな議論で数値的に真の解を得ることができる。このモデルで軸比を変えることは、次元性を変化させることに相当すると考えることができる。（後述）よってこのモデルで軸比を変えて次元性をコントロールすることによって、まず視点(1)について考察する。さらに視点(2)について議論するために、Padé 近似を導入する。この Padé 近似は純粋に数学的な近似法であるが、有限次数までのべき級数展開を、有理数展開の形に変形することで、よりよい近似にしようというものである。この近似を適用すると、経験的に近似の精度が上がることが知られている。この Padé 近似を Euler 的な密度揺らぎの摂動展開に適用して、新しくよりよい近似法を作り出す。もし二つのうち後者の視点が正しいならば、この新しい近似法にくらべても、Zel'dovich-type 近似のほうがはるかによい近似法になっているはずである。

### 3.1 一様回転楕円体モデル

この章では

視点(1) : Zel'dovich-type 近似法のよさが、その一次元厳密性によって支持されているのか  
 ということを検証するために一様回転楕円体モデルで議論をする。

#### 3.1.1 一様回転楕円体モデルの運動方程式

Einstein-de Sitter 宇宙の中での質点の運動を記述する方程式は、

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} + 2H \frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\nabla_x \Phi(\mathbf{x}, t), \quad (3.2)$$

$$\nabla_x^2 \Phi = \frac{3}{2} H^2 \delta(\mathbf{x}, t), \quad (3.3)$$

である。ここでも  $d/dt$  は Lagrange 的な時間微分である。いま、密度揺らぎの分布の形として三次元楕円体を考える。楕円体の内部には一様に密度揺らぎ  $\delta_e$  が分布していて、外側では  $\delta = 0$  であると考えるので、 $\delta(\mathbf{x}, t)$  は、

$$\delta(\mathbf{x}, t) = \delta_e(t) \Theta \left( 1 - \frac{x_1^2}{\alpha_1^2(t)} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2(t)} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2(t)} \right), \quad (3.4)$$

で与えられる。 $\alpha_i$  は楕円体の三つの軸方向の半径で、 $\Theta$  はステップ関数である。すると、楕円体内部での、Poisson 方程式 (3.3) の解は、

$$\Delta^{-1} \Theta \left( 1 - \frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} \right) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 A_i x_i^2, \quad (3.5)$$

となる。上式の右辺は楕円体の内部のみに対してのものである (参考: Kellogg (1953) [13]、Binney et al. (1987) [10])。ここで、

$$A_i = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \int_0^\infty (\alpha_i^2 + \lambda)^{-1} \prod_{j=1}^3 (\alpha_j^2 + \lambda)^{-1/2} d\lambda. \quad (3.6)$$

この  $A_i$  は定数であるが、以下の条件を自動的に満たす。

$$\sum_{i=1}^3 A_i = 2. \quad (3.7)$$

結局この系では式 (3.3) は解析的に解くことができ、その解は、

$$\Phi = \frac{3}{8} H^2 \delta_e \sum_{i=1}^3 A_i(t) x_i^2. \quad (3.8)$$

となる。この解は二次形式になっているわけであるが、このことは初期条件として線形の世界場と一様な密度分布を与えてやることにより時間発展しても、ずっと一様な密度分布の楕円体となる解が存在することを示唆している (参考: Lynden-Bell (1962) (1964) [25] [26]、Lin et al. (1965) [24]、Icke (1973) [23])。 (もちろん軸比は時間発展する。)

結局 (3.2) と (3.8) により楕円体内の質点に対して

$$\ddot{x}_i + 2H\dot{x}_i = -\frac{3}{4} H^2 \delta_e A_i x_i, \quad (3.9)$$

という運動方程式を得ることができる。一般的な系においてはある質点の  $\delta_e$  と  $A_i$  は、他の質点の位置から決まる体積や楕円体の形に依存するが、今回考えている一様に時間発展する系

では、 $(\alpha_1(t), 0, 0)$ 、 $(0, \alpha_2(t), 0)$ 、 $(0, 0, \alpha_3(t))$  という座標にのった三つの質点の運動を考えるだけでよく、この三点の運動のみによって楕円体内のすべての運動を特徴づけることができる。楕円体内の密度揺らぎは、

$$\delta_e = \frac{a^3}{a_{\text{in}}^3} (1 + \delta_{\text{in}}) \frac{\alpha_{\text{in}1} \alpha_{\text{in}2} \alpha_{\text{in}3}}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} - 1, \quad (3.10)$$

で与えることができる。ここで  $\alpha_{\text{in}} = \alpha(t_{\text{in}})$ 、 $a_{\text{in}} = a(t_{\text{in}})$  で、又  $t_{\text{in}}$  は初期時刻である。さきほどの三点の従う運動方程式は、結局

$$\ddot{\alpha}_i + 2H\dot{\alpha}_i = -\frac{3}{4}H^2\delta_e A_i \alpha_i. \quad (3.11)$$

となる。式(3.6)、(3.10)、(3.11)は楕円体内の運動を記述する方程式系として閉じていて、これらを解いていけばよい。このように簡単な取り扱いができるという理由から、楕円体モデルは宇宙の複雑な構造形成の初期段階の近似としてしばしば用いられている（参考：White et al. (1979) [29]、Eisenstein et al. (1995) [11]、Bond et al. (1996) [15]）。

さて、これらの運動方程式を数値的に解いていくわけであるが、その初期条件を、 $\delta_{\text{in}} = 10^{-5} - 10^{-9}$  として、また初期速度場はZAで与える。 $\delta_{\text{in}}$ を十分小さく取っておけば、初期の速度場としてZAを適用することで十分正確性を保証できる。実際ZAのかわりにPZA、PPZAを適用しても全くかわらない結果となることは確かめることができ、シンプルなZAで十分であることが分かる。今回はさらに $\alpha_1 = \alpha_2$ という回転対称の条件をおいた。この回転楕円体の場合には、 $A_i$ は、

$$A_1 = A_2 = \frac{2}{3}(1 + h), \quad A_3 = \frac{2}{3}(1 - 2h), \quad (3.12)$$

ただし、

$$h = \begin{cases} \frac{3}{2} \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3} \sin^{-1} e - \frac{3-e^2}{2e^2}, & e = \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)^2} \quad (\alpha_1 = \alpha_2 > \alpha_3) \\ \frac{3}{4} \frac{1-\bar{e}^2}{\bar{e}^3} \ln\left(\frac{1-\bar{e}}{1+\bar{e}}\right) + \frac{3-\bar{e}^2}{2\bar{e}^2}, & \bar{e} = \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\right)^2} \quad (\alpha_1 = \alpha_2 < \alpha_3) \end{cases} \quad (3.13)$$

という解析的な形で与えられる。上式で初期に与える軸比 $\frac{\alpha_3}{\alpha_1}$ が1に比べて小さい極限が一次元的な collapse、1に比べて充分大きい極限が二次元的な collapse と考えることができる。(1のときは球対称モデルに相当する。) つまりこの回転楕円体モデルで軸比を変化させることで次元性を自在にコントロールすることができる。



### 3.1.2 線形摂動理論での解

回転楕円体モデルの線形摂動理論での解は簡単で、

$$\delta_L(\mathbf{x}, t) = \frac{a}{a_{\text{in}}} \delta_{\text{in}} \Theta \left( 1 - \frac{x_1^2}{\alpha_{\text{in}1}^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_{\text{in}2}^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_{\text{in}3}^2} \right), \quad (3.14)$$

$a$  に対して、 $a_{\text{in}} = |\delta_{\text{in}}|$  という規格化をすると、

$$\delta_L(\mathbf{x}, t) = \pm a \Theta \left( 1 - \frac{x_1^2}{\alpha_{\text{in}1}^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_{\text{in}2}^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_{\text{in}3}^2} \right), \quad (3.15)$$

となる。以下、上下付の符号については、上は正の揺らぎ ( $\delta_e > 0$ ) に対して、下は負の揺らぎ (ポイド:  $\delta_e < 0$ ) に対してのものとする。このとき (3.5) を解いて、線形重力ポテンシャルは

$$\phi_L(\mathbf{x}) = \pm \frac{a^3 H^2}{4} \left[ (1 + h_{\text{in}})(x_1^2 + x_2^2) + (1 - 2h_{\text{in}})x_3^2 \right]. \quad (3.16)$$

となる。図 3.1~ 3.5 までに数値的眞の解  $\delta_{\text{true}}$  に対する線形の解  $\delta_L$  をいくつか軸比を変えてプロットしてある。

### 3.1.3 Frozen flow 近似での解

楕円体モデルの中での Frozen flow 近似解を求める。楕円体内の線形重力ポテンシャルは (3.16) で与えられるので、FF での微分方程式 (2.8) は、

$$\frac{\partial x_{(1,2)}}{\partial a} = \mp \frac{1}{3} (1 + h_{\text{in}}) x_{(1,2)}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial a} = \mp \frac{1}{3} (1 - 2h_{\text{in}}) x_3. \quad (3.17)$$

となる。(1,2) はそれぞれ相当な 2 軸である  $x_1, x_2$  に対する方程式という意味である。これらの方程式の解は、

$$x_{(1,2)} = q_{(1,2)} \exp \left( \mp \frac{1 + h_{\text{in}}}{3} a \right), \quad x_3 = q_3 \exp \left( \mp \frac{1 - 2h_{\text{in}}}{3} a \right). \quad (3.18)$$

$q_i$  は積分定数で、 $a \rightarrow 0$  のとき  $x_i \rightarrow q_i$  となり、初期条件に相当する。また、 $a \rightarrow 0$  で  $\delta \rightarrow 0$  となることと、 $\rho \propto (x_1 x_2 x_3)^{-1}$  より密度揺らぎの時間発展は

$$\delta = \frac{q_1 q_2 q_3}{x_1 x_2 x_3} - 1 = \exp(\pm a) - 1. \quad (3.19)$$

となる。ここで注目したいことは、FFでの密度揺らぎの解(3.19)はパラメーター $h_{\text{in}}$ には依らないという点である。つまり、この近似法では、密度揺らぎそのものは軸比に依らず球対称モデル ( $h_{\text{in}} = 0$ ) のときと同じ時間発展をすることになる。

図 3.1～ 3.5までに数値的真の解 $\delta_{\text{true}}$ に対するFFでの解をいくつか軸比を変えてプロットしてある。

### 3.1.4 Linear potential 近似での解

楕円体モデルの中での Linear potential 近似解を求める。(2.11) と (3.16) より LP での運動方程式は、

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_{(1,2)}}{da^2} + \frac{3}{2a} \frac{dx_{(1,2)}}{da} \pm \frac{1}{2a} (1 + h_{\text{in}}) x_{(1,2)} = 0, \\ \frac{d^2 x_3}{da^2} + \frac{3}{2a} \frac{dx_3}{da} \pm \frac{1}{2a} (1 - 2h_{\text{in}}) x_3 = 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

となり、これを解いて、

$$\begin{cases} x_{(1,2)} = \frac{q_{(1,2)}}{\sqrt{2(1+h_{\text{in}})a}} \sin \sqrt{2(1+h_{\text{in}})a} \\ x_3 = \frac{q_3}{\sqrt{2(1-2h_{\text{in}})a}} \sin \sqrt{2(1-2h_{\text{in}})a} \end{cases} \quad (\delta > 0), \quad (3.21)$$

$$\begin{cases} x_{(1,2)} = \frac{q_{(1,2)}}{\sqrt{2(1+h_{\text{in}})a}} \sinh \sqrt{2(1+h_{\text{in}})a} \\ x_3 = \frac{q_3}{\sqrt{2(1-2h_{\text{in}})a}} \sinh \sqrt{2(1-2h_{\text{in}})a} \end{cases} \quad (\delta < 0). \quad (3.22)$$

よって密度揺らぎの時間発展は、

$$\delta = \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}(1+h_{\text{in}})(1-2h_{\text{in}})^{1/2}a^{3/2}}{\sin^2 \sqrt{2(1+h_{\text{in}})a} \sin \sqrt{2(1-2h_{\text{in}})a}} - 1 & (\delta > 0) \\ \frac{2\sqrt{2}(1+h_{\text{in}})(1-2h_{\text{in}})^{1/2}a^{3/2}}{\sinh^2 \sqrt{2(1+h_{\text{in}})a} \sinh \sqrt{2(1-2h_{\text{in}})a}} - 1 & (\delta < 0) \end{cases}. \quad (3.23)$$

球対称モデル ( $h_{\text{in}} = 0$ ) では、

$$\delta = \begin{cases} \left( \frac{\sqrt{2a}}{\sin \sqrt{2a}} \right)^3 - 1 & (\delta > 0) \\ \left( \frac{\sqrt{2a}}{\sinh \sqrt{2a}} \right)^3 - 1 & (\delta < 0) \end{cases}, \quad (3.24)$$

となり、これは Brainerd et al. (1993) [4] によって求められた解と一致する。

図 3.1～ 3.5までに数値的真の解 $\delta_{\text{true}}$ に対するLPでの解をいくつか軸比を変えてプロットしてある。

### 3.1.5 Zel'dovich-type 近似での解

楕円体モデルの中での Zel'dovich 近似と、その高次の拡張である Post-Zel'dovich 近似、Post-post-Zel'dovich 近似解を求める。

Zel'dovich 近似では、質点は式 (2.26) に沿って動く。よって (3.16) を使って、

$$\begin{cases} \psi_{(1,2)}^{(1)} = \mp \frac{a^3 H^2 q_{(1,2)}}{2} (1 + h_{\text{in}}) \\ \psi_3^{(1)} = \mp \frac{a^3 H^2 q_3}{2} (1 - 2h_{\text{in}}) \end{cases} \quad (3.25)$$

が得られる。

また、二次の項 (2.27) は、 $q$ -空間で楕円体の外側は  $\delta = 0$  となって、密度揺らぎが存在しないという仮定をしているので、式 (3.5) より逆ラプラス変換が計算可能である。このように Lagrange 的摂動展開では、簡単に楕円体の境界を見ることができる。この点は Lagrange 的摂動展開が Euler 的描像に比べて技術的に優れているところであるといえる。さて、式 (2.27) は、この場合

$$\begin{cases} \psi_{(1,2)}^{(2)} = -\frac{3a^6 H^4 q_{(1,2)}}{28} (1 + h_{\text{in}} - h_{\text{in}}^2 - h_{\text{in}}^3), \\ \psi_3^{(2)} = -\frac{3a^6 H^4 q_3}{28} (1 - 2h_{\text{in}} - h_{\text{in}}^2 + 2h_{\text{in}}^3). \end{cases} \quad (3.26)$$

となる。同様にして、三次の項 (2.28) も計算できて、

$$\begin{cases} \psi_{(1,2)}^{(3)} = \mp \frac{a^9 H^6 q_{(1,2)}}{504} (23 + 23h_{\text{in}} - 39h_{\text{in}}^2 - 25h_{\text{in}}^3 + 44h_{\text{in}}^4 + 30h_{\text{in}}^5) \\ \psi_3^{(3)} = \mp \frac{a^9 H^6 q_3}{504} (23 - 46h_{\text{in}} - 39h_{\text{in}}^2 + 92h_{\text{in}}^3 + 2h_{\text{in}}^4 - 60h_{\text{in}}^5) \end{cases} \quad (3.27)$$

となる。

Zel'dovich-type 近似での密度揺らぎは、

$$\delta = \frac{1}{(1 + \Psi_1/q_1)(1 + \Psi_2/q_2)(1 + \Psi_3/q_3)} - 1, \quad (3.28)$$

と書ける。ここで、ZA では  $\Psi_i = \Psi_i^{(1)}$ 、PZA に対しては  $\Psi_i = \Psi_i^{(1)} + \Psi_i^{(2)}$ 、PPZA では  $\Psi_i = \Psi_i^{(1)} + \Psi_i^{(2)} + \Psi_i^{(3)}$  である。 $\psi$  と  $\Psi$  との関係は (2.22) で与えられる。

球対称モデル ( $h_{\text{in}} = 0$ ) のときは、式 (3.28) は、ZA、PZA、PPZA の解はそれぞれ

$$\delta = \left(1 \mp \frac{a}{3}\right)^{-3} - 1, \quad (3.29)$$

$$\delta = \left(1 \mp \frac{a}{3} - \frac{a^2}{21}\right)^{-3} - 1, \quad (3.30)$$

$$\delta = \left(1 \mp \frac{a}{3} - \frac{a^2}{21} \mp \frac{23a^3}{1701}\right)^{-3} - 1, \quad (3.31)$$

となり、これは Munshi et al. (1994) [6] の結果と一致する。また回転楕円体モデルでの Lagrange 的摂動展開をつかった質量関数 (mass function) に関する考察は Monaco (1997) [27] によってされている。

図 3.1～3.5 までに数値的眞の解  $\delta_{\text{true}}$  に対する ZA、PZA、PPZA での解をいくつか軸比を変えてプロットしてある。

### 3.1.6 二次、三次の摂動理論での解

Lagrange 的摂動展開に比べて、Euler 的摂動展開は、楕円体の境界 (表面) の運動を明確に追うことはできない。この問題が Euler 的摂動展開法を用いて回転楕円体内の密度揺らぎの計算をすることを難しくしている。ここではその困難を回避するためにすでに Lagrange 的手法で得ることができている記述を Euler 的な展開に翻訳し直してそれを Euler 的な解であると思うことにする。そのためにはまず、両者の展開パラメーターを比べて対応関係を見なくてはならない。実はこの二つのパラメーターはそれぞれ同じオーダーで、つまり、 $\delta \sim \mathcal{O}(\Psi_{i,j})$  である。さらに Euler 的展開では  $\delta^{(n)}$  は  $(\delta_L)^n$  のオーダーであるわけだが、Lagrange 的展開でも、 $\Psi_{i,j}^{(n)} \sim \mathcal{O}(\Psi_{i,j}^{(1)})^n$  となっている。ようするに、 $\Psi_{i,j}^{(n)} \sim \delta^{(n)}$  であることが分かる。つまり、Euler 的摂動展開 (密度揺らぎの展開) の  $n$  次までを得るためには、Lagrange 的摂動展開 ( $\Psi_{i,j}^{(1)}$  での展開) の  $n$  次までの計算からさらに密度揺らぎの展開を求めて、それを  $\delta_L$  で書き直せばよい。いま考えている系では  $\Psi^{(n)} \propto a^n$  なので、Euler 的摂動展開での  $n$  次までの解は単純に式 (3.28) を  $a$  で  $n$  次まで展開することで得られる。よって三次までの解は、

$$\delta = \pm a + \left(\frac{17}{21} + \frac{4}{21} h_{\text{in}}^2\right) a^2 \pm \left(\frac{341}{567} + \frac{74}{189} h_{\text{in}}^2 - \frac{4}{81} h_{\text{in}}^3 - \frac{8}{189} h_{\text{in}}^4\right) a^3. \quad (3.32)$$

となる。この論文では上式を採用するが、実はこれは唯一の解というわけではない。実際に Lagrange 的手法とは全く無関係に純粹に Euler 的摂動展開を考えて解を求めることができる。しかしながら、Euler 的描像では、今仮定している「楕円体の外側では揺らぎはないも



のとする。」というものが明確には設定できない。なぜならば前にも述べたように Euler 的描像では、楕円体の境界（表面）の運動をきちんと追うことができないからである。Lagrange 的描像では 3.1.5 章で述べたように、「時間発展していく（時々刻々と変化している）楕円体の表面の外」に揺らぎがないという仮定をしているが、一方 Euler 的描像で考える場合には、「初期での楕円体の外側」で揺らぎをゼロであると思うのが最も技術的に考えやすい仮定である。（Lagrangian 座標系では質点にラベルが貼られるが、Eulerian 座標系は空間にラベルが貼られるため。）比較のために後者の仮定「初期での楕円体の外側」で揺らぎをゼロを用いたときに Euler 的描像から求めた解を書いておくと、

$$\delta = \pm a + \left( \frac{17}{21} + \frac{4}{21} h_{\text{in}}^2 \right) a^2 \pm \left( \frac{341}{567} + \frac{38}{105} h_{\text{in}}^2 - \frac{8}{405} h_{\text{in}}^3 + \frac{16}{945} h_{\text{in}}^4 \right) a^3. \quad (3.33)$$

上の二つの表現（式(3.32)と(3.33)）には二つの非常に似ているところがある。一つは球対称項（ $h_{\text{in}}$ とは無関係の項）は両者で等しいというところにある。球対称モデルにおいては、ある位置における密度揺らぎの発展はその点が含まれる球核の内側に分布している質量のみに依存しているため、その外側の密度揺らぎがどうなっても内側の運動には影響しない。二つ目は二次の項までは等しいという点である。このことは以下のように理解できる。まず線形理論では  $\delta \propto a$  なので楕円体の中であろうと外であろうと関係なく一様な時間発展をする。二次の項を導出する際には、（一般にはそうでないが）楕円体の外側の揺らぎの効果を受けないように固定することができる。二次の段階ではそのことで楕円体内の密度揺らぎに影響を与えることはない。なぜならば、二次の揺らぎを解くときに考えるべき非局所性は、線形の密度揺らぎのみが担っているからである。しかしながら、三次やそれ以上の次数の揺らぎを考えるとときには、その影響が入ってきてしまう。よって三次以上では、Euler 的描像での境界の取り方の不明慮さによって上の二つの表現に違いがでてきてしまうのである。

図 3.1～ 3.5 までに数値的真的解  $\delta_{\text{true}}$  に対する Euler 的二次、三次の解をいくつか軸比を変えてプロットしてある。

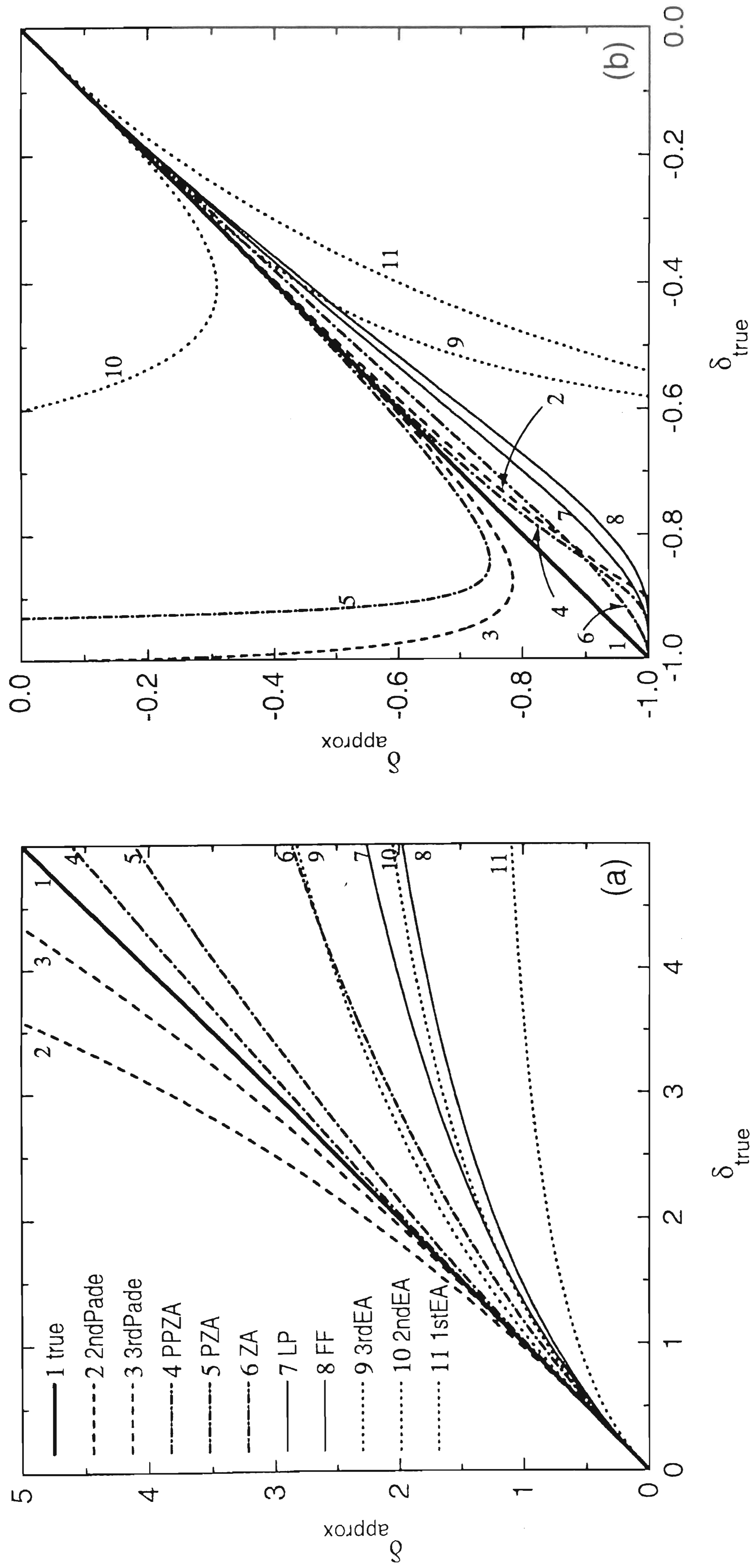


図 3.1: 球対称モデル ( $\frac{\alpha_{\text{in}3}}{\alpha_{\text{in}1}} = 1$ ) での数値的眞の解と近似解の比較: (左) 正の揺らぎ (右) 負の揺らぎ

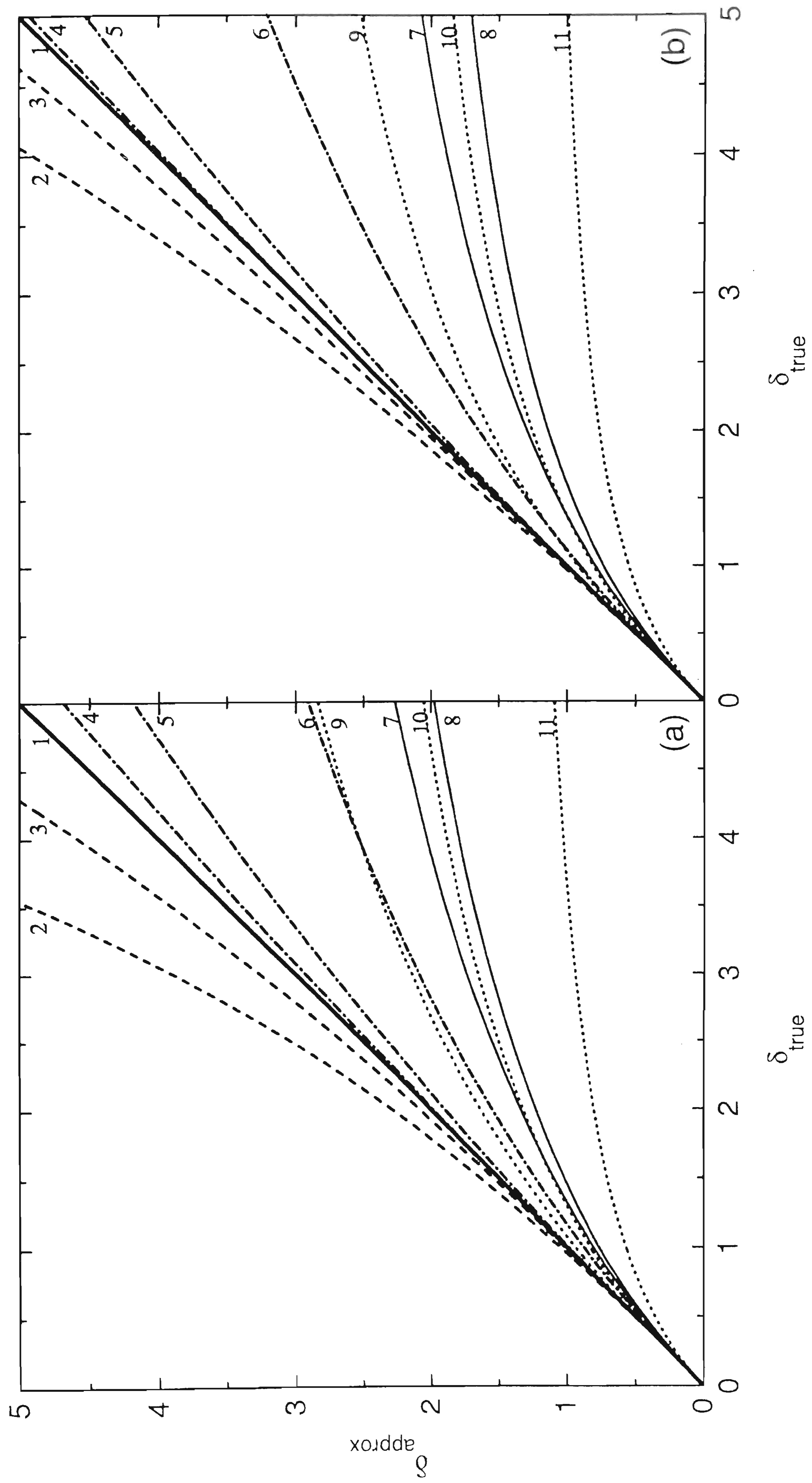


図 3.2: oblate な回転楕円体モデルでの数値的眞の解と近似解の比較 (正の揺らぎ) : (左)  
 $\frac{\alpha_{in3}}{\alpha_{in1}} = 0.8$  (右)  $\frac{\alpha_{in3}}{\alpha_{in1}} = 0.3$

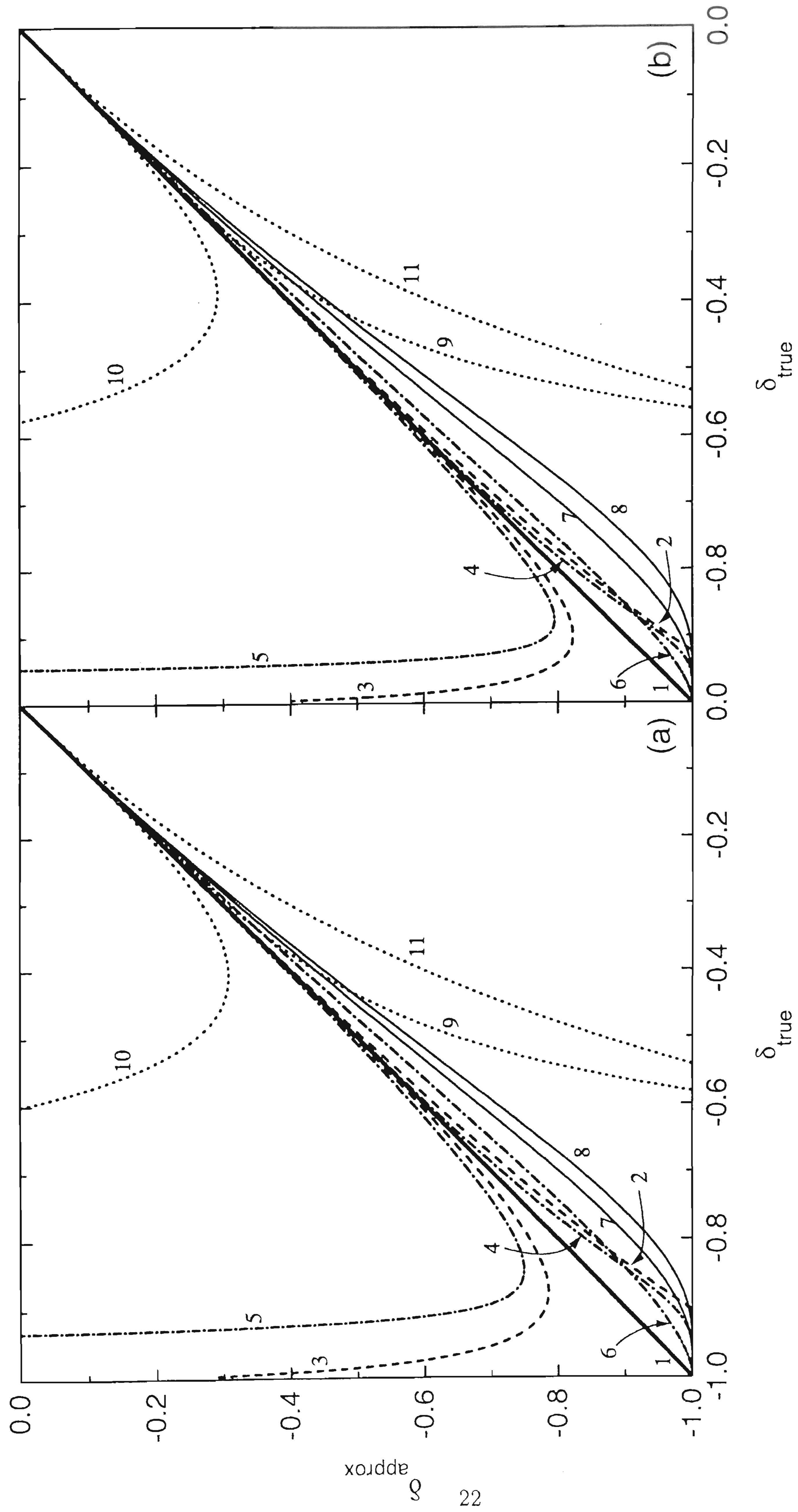


図 3.3: oblate な回転楕円体モデルでの数値的真的解と近似解の比較 (負の揺らぎ) : (左)  
 $\alpha_{in3} = 0.8$  (右)  $\alpha_{in3} = 0.3$   
 $\alpha_{in1} = 0.3$  (左)  $\alpha_{in1} = 0.8$  (右)



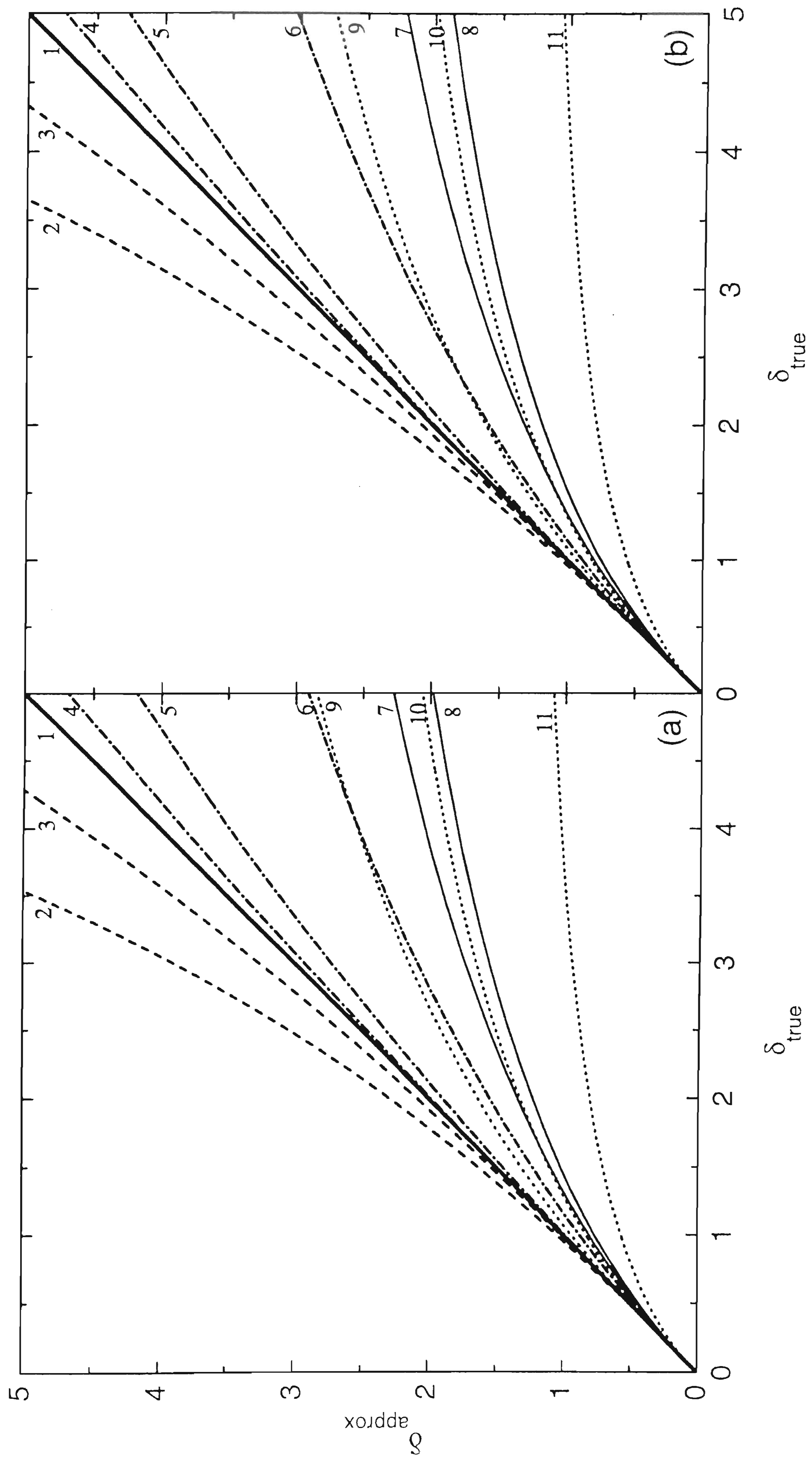


図 3.4: prolate な回転楕円体モデルでの数値的真的解と近似解の比較 (正の揺らぎ): (左)  
 $\frac{\alpha_{in3}}{\alpha_{in1}} = 1.2$  (右)  $\frac{\alpha_{in3}}{\alpha_{in1}} = 3$

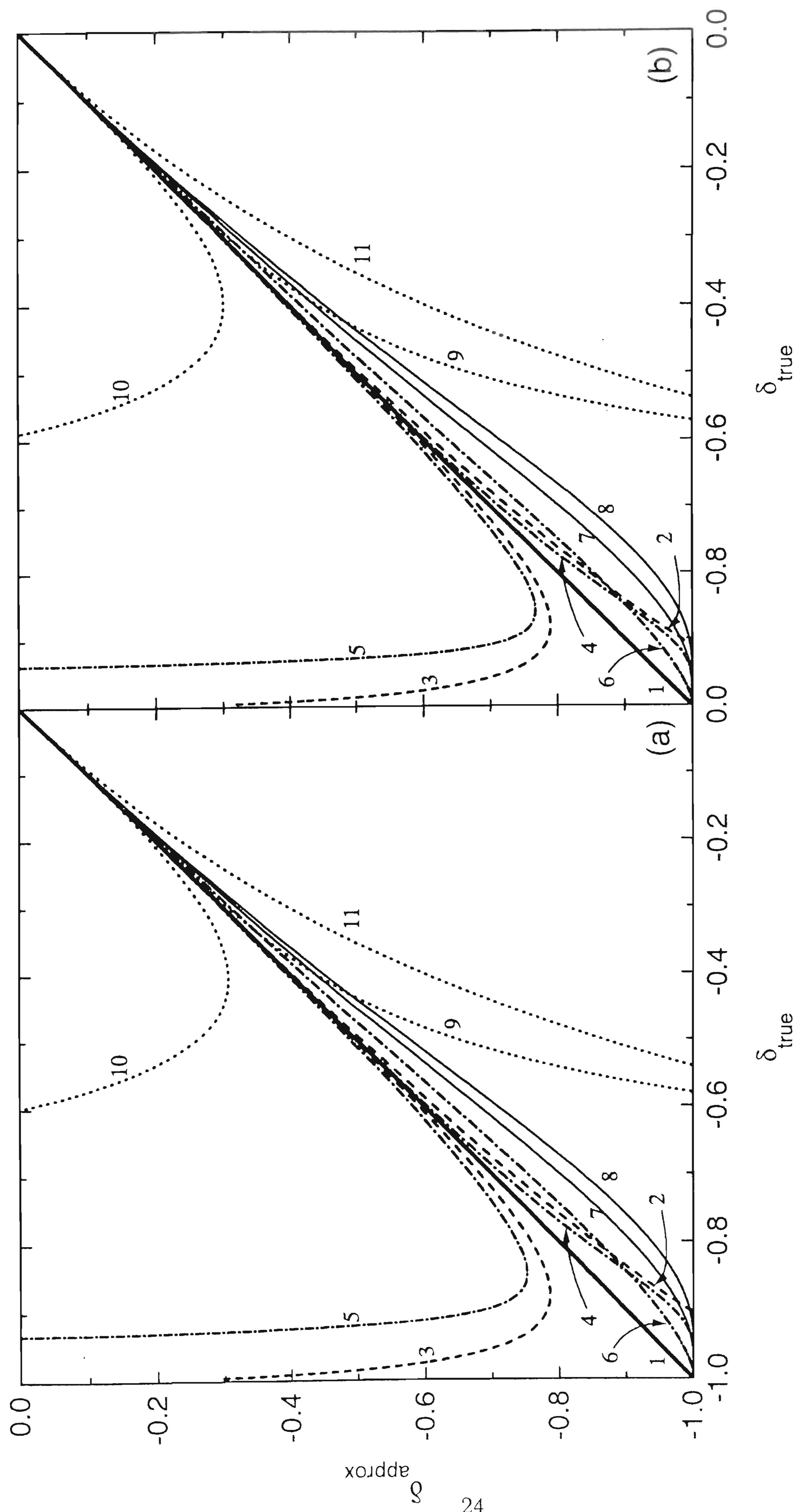


図 3.5: prolate な回転楕円体モデルでの数値的眞の解と近似解の比較 (負の揺らぎ): (左)  
 $\alpha_{in3} = 1.2$  (右)  $\alpha_{in3} = 3$   
 $\alpha_{in1}$

### 3.2 Padé 近似

前述したように Zel'dovich-type 近似法は Lagrange 的描像に基づいているという点で他のどの近似法と比べてもユニークである。ここでは、

視点(2) : Zel'dovich-type 近似法の Lagrange 的描像が、これらの近似法のよさを支持しているのか

ということについて考察する。そのために、Padé 近似 (参考: Press et al. (1992) [28]、Bender et al. (1978) [32]) という、純粋な数学的近似法を Euler 的な摂動展開の解に適用することによって、新たな近似を作り出す。これを今回の回転楕円体モデルの中で他の近似法と比べると、Zel'dovich-type 近似法と同等の精度を持つ近似法になっている事がわかる。

一般にある関数は、

$$f(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad (3.34)$$

のように、べき級数に展開できる。これの、 $M + N$  番目までの展開

$$\sum_{k=0}^{M+N} c_k x^k. \quad (3.35)$$

を

$$R(x) \equiv \frac{\sum_{k=0}^M a_k x^k}{1 + \sum_{k=1}^N b_k x^k}, \quad (3.36)$$

という二つの展開の比の形におきかえる。

$$\begin{aligned} R(0) &= f(0), \\ \left. \frac{d^k}{dx^k} R(x) \right|_{x=0} &= \left. \frac{d^k}{dx^k} f(x) \right|_{x=0}, \quad k = 1, 2, \dots, M + N \end{aligned} \quad (3.37)$$

をみたすという条件より、結局、

$$\left( 1 + \sum_{k=1}^N b_k x^k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \right) = \sum_{k=0}^M a_k x^k, \quad (3.38)$$

となり、これによって、

$$\sum_{m=1}^N b_m c_{N-m+k} = -c_{N+k}, \quad k = 1, \dots, N \quad (3.39)$$

$$\sum_{m=0}^k b_m c_{k-m} = a_k, \quad k = 1, \dots, N \quad (3.40)$$

という関係式が求まり、 $c_0 = a_0$ とすることによって、一般的なべき級数展開  $f(x)$  が、 $n$  次の項までわかっているとき、 $M + N = n$  までの、 $R(x)$  に書き換えることができるのである。つまり、この近似法は、ある未知関数  $f(x)$  に対して、有限の項までのべきが近似的にわかっているときに、さらに  $R(x)$  の形に書き換えてやるというものである。そうすると、 $f(x)$  のままの形で近似するより、 $R(x)$  の形に置き直したほうが、一般により良い近似になっていることが知られている。(  $n$  次の項までのべきで、完全に書ける関数は、もちろん除く) ただし、なぜそうなっているかという数学的根拠はなく、少数の反例も確認されている。ただ、この近似法では、分母に展開の形を持ってくることによって、極を作ることができる。よって有限の  $x$  において発散するような系においてはただ展開した  $f(x)$  よりもよい近似になっている可能性が高いといえる。

さて、ここでこの Padé 近似を Euler 的摂動展開に適用する。式 (3.32) で三次までの Euler 的な展開の形が得られているので、これを上のルールに沿って変形する。すると、この式 (3.32) の Padé 近似は、二次にたいしては、

$$\delta = \frac{\pm a}{1 \mp \frac{17 + 4h_{\text{in}}^2}{21} a}. \quad (3.41)$$

三次は、

$$\delta = \frac{\pm a}{1 \mp \frac{17 + 4h_{\text{in}}^2}{21} a + \left( \frac{214}{3969} - \frac{110}{1323} h_{\text{in}}^2 + \frac{4}{81} h_{\text{in}}^3 + \frac{104}{1323} h_{\text{in}}^4 \right) a^2}. \quad (3.42)$$

となる。

これらの解はすでに図 3.1 ~ 3.5 にプロットされている。この Padé 近似は Euler 的摂動展開を、力学的に劇的に改善している。図より、その精度は Zel'dovich-type 近似法とほぼ同等になっているといえる。さらに、一次元的 collapse の極限をとる。式 (3.13) の  $e \rightarrow 1$  つま



り、 $h_{\text{in}} \rightarrow -1$  とすると、その極限では、式(3.42)、(3.41)は $\delta = \pm a/(1 \mp a)$ となる。このことは、このEuler的Padé近似がZAと同じく一次元厳密性を持っていることを意味する。

余談になるが、実際にさまざまな観測量と直結して考えやすいのは、Euler的手法の方である。よって、観測的宇宙論の見地にとつと、なにかEuler的な、良い近似法が望まれる。そういう意味では、このEuler的なPadé近似は優秀であり、今後高次の実空間での摂動展開の一般解を得ることができれば、それにPadé近似を適用することでかなり有望な近似を作れることになる。

### 3.3 Discussion:なぜZAがいい近似になっているのか

前章までの結果を考察して、「なぜZAがいい近似法になっているのか」という問題について議論する。図3.1～3.5から分かるようにそれぞれの近似法は滑らかで、近似のよさの順位も密度揺らぎの値によっては大きく変わらない。よって、近似のよさを測るためにここでは各軸比において充分非線形な領域である $\delta_{\text{true}} = 4$ のときの、各近似での $\delta_{\text{approx}}/\delta_{\text{true}}$ という量を比べる。図3.6に、これらの値を対数スケールでプロットした。横軸は楕円体の初期軸比である。同様に図3.7には、負の揺らぎ(ポイド)のときの同様の値 $\delta_{\text{approx}}/\delta_{\text{true}}$ を、 $\delta_{\text{true}} = -0.6$ のときに測ってプロットした。

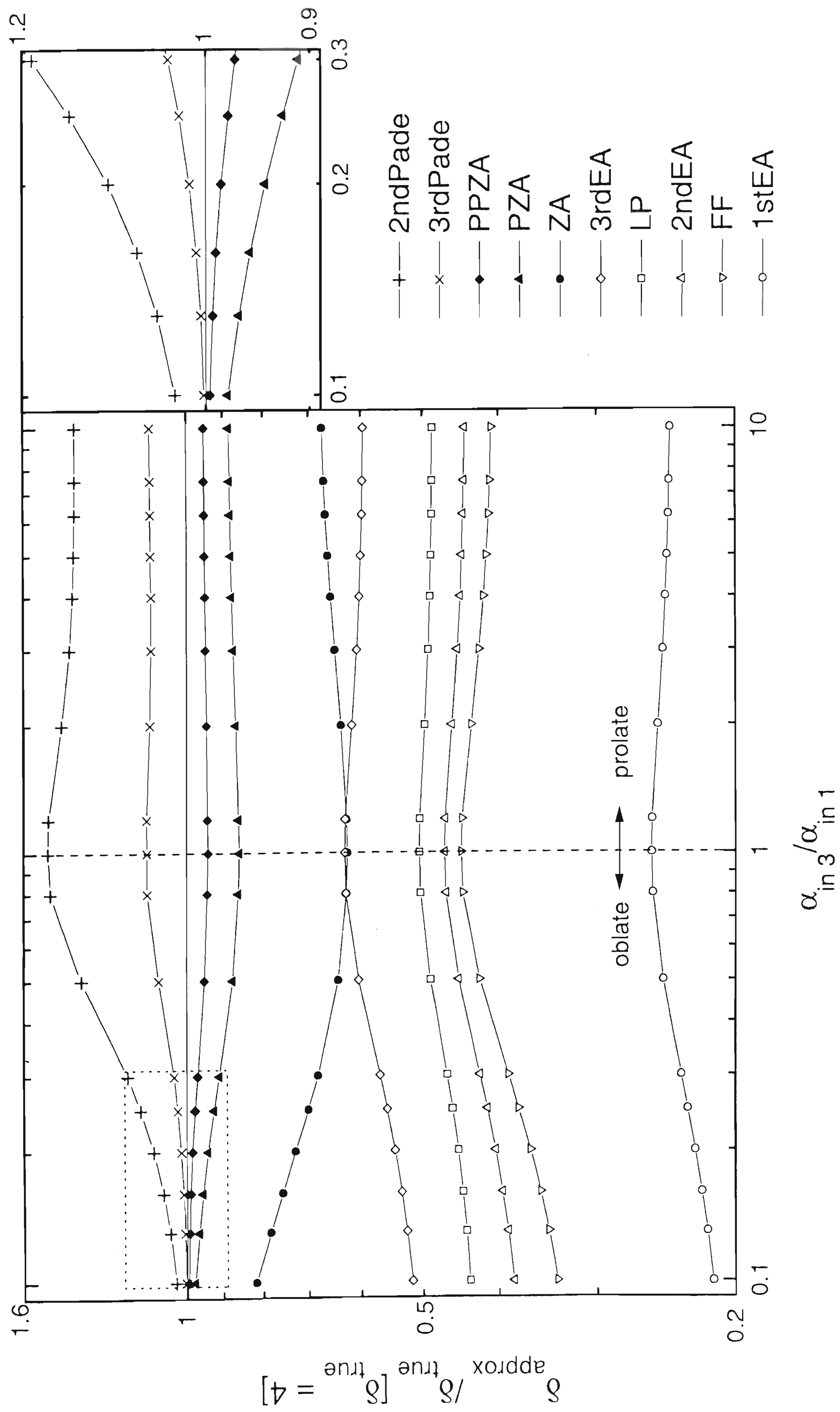


図 3.6:  $\delta_{\text{true}} = 4$  のときの、各近似での  $\delta_{\text{approx}}/\delta_{\text{true}}$ 。横軸は楕円体の初期軸比である。

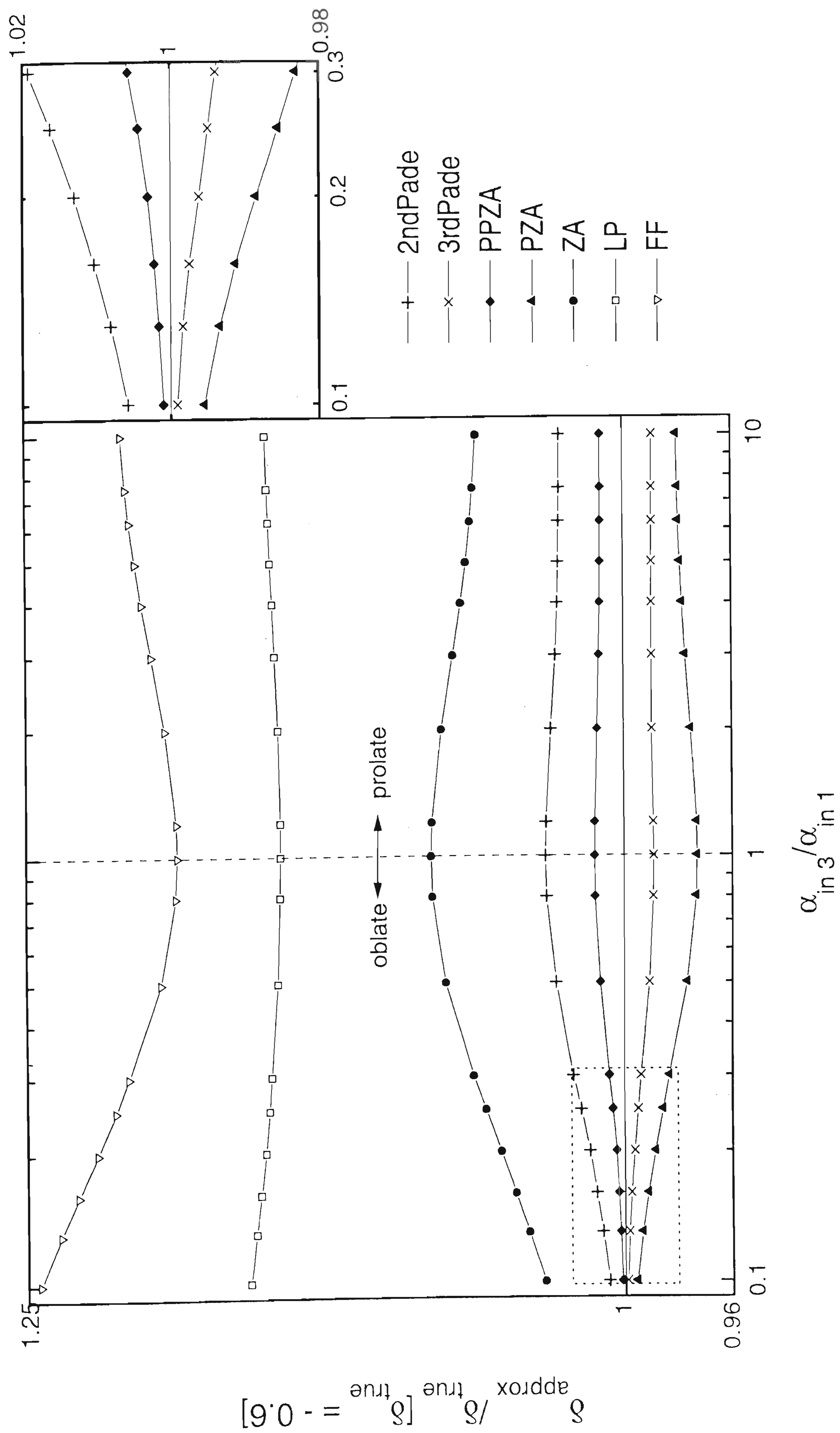


図 3.7:  $\delta_{\text{true}} = -0.6$  のときの、各近似での  $\delta_{\text{approx}} / \delta_{\text{true}}$ 。横軸は楕円体の初期軸比である。

この図 3.6、図 3.7がここまでのすべて結果のまとめになっている。この二つの図から以下のことが読み取れる。

- (i) Zel'dovich-type 近似は (Padé 近似以外の) どの Euler 的近似法よりもはるかによい近似である。そして、Zel'dovich-type 近似はどの場合も高次のものほど低次のものに比べてよくなっている。
  - (ii) どんな初期軸比の系においても近似のよさの順位は変わらない。これは正の揺らぎに対しても負の揺らぎ (ボイド) に対しても同様に言えることである。
  - (iii) Zel'dovich-type 近似の精度は球対称モデルのときにくらべると、prolate (葉巻形) な初期条件のときも oblate (ハンバーガー形) な初期条件のときもそれぞれよくなっている。さらに言うと、prolate な初期条件のときよりも oblate な初期条件のときの方がよりよい近似になっている。一方 Padé 近似以外の Euler 的な近似法はすべて、まさしく正反対の傾向を示し、近似の精度は、prolate な初期条件のときも oblate な初期条件のときも球対称のときと比べて悪くなる。しかも oblate な初期条件のときは prolate な初期条件のときよりもさらに悪い。
  - (iv) Padé 近似は他のどの Euler 的な近似法よりもはるかによい近似になっている。そしていつも高次の Padé 近似はたしかに低次のそれよりもよい近似である。さらに、Padé 近似もまた一次元厳密性を持っている。
  - (v) Zel'dovich-type 近似法の精度と Padé 近似の精度はほとんど同程度である。
  - (vi) Zel'dovich-type 近似法と Padé 近似はそれぞれ反対の方向から真の解に近づいていく。例えば、図 3.6では Padé 近似はすべて密度揺らぎを過大に見積もっているが Zel'dovich-type 近似ではすべて過小に見積もられている。同様に図 3.7でも例えば PPZA は密度揺らぎを過大に見積もっているが、それに比べて、三次の Padé 近似は過小に見積もっている。
- (i) と (ii) の結果によって回転楕円体モデルにおいても Zel'dovich-type 近似が優れているということを確かめられた。そして、その中でもいつでも高次の近似になるほどよくなるという一



貫性も確認することができた。結果 (iii) は視点 (1) 「Zel'dovich-type 近似の正当性はそれのもつ一次元厳密性に基づいている」ということを支持するものである。実際 Zel'dovich-type 近似は系が徐々に球対称から外れていくにつれ少しずつ精度を上げていっている。Zel'dovich-type 近似は事実上一次元的 collapse となる oblate collapse のときに最も正確になっているのである。その次には prolate collapse のときによくあるが、この系は二次元的な collapse に相当する。結果 (iv) は、Euler 的描像でのよい近似法開発の可能性を示唆している。そして結果 (v) は視点 (2) 「Zel'dovich-type 近似の正当性はそれのもつ Lagrange 的描像に基づいている」にたいして反証を挙げることになる。結果 (vi) は、Zel'dovich-type 近似と Padé 近似は図 3.6、図 3.7 で似通ったふるまいをし、またそれぞれの展開の形 (3.31)、(3.42) も似ていながらも、確かに全く別の論理から作られた違う近似法であるということを意味している。これは Zel'dovich-type 近似法に Padé 近似法を適用してさらに質のよい近似法をつくり出せることを示唆している。なぜならば Zel'dovich-type 近似と Padé 近似は全く別のものであり、この両者を組み合わせることで新しい情報が引き出せる可能性があるからである。この新しい近似法は、次章で紹介することにする。

このようなことから結局ここまでの結果は、視点 (1) 「Zel'dovich-type 近似のよさはそれの一次元厳密性によっている」ということを支持し、逆に視点 (2) 「Zel'dovich-type 近似の正当性はそれのもつ Lagrange 的描像に基づいている」に対しては不賛成を唱えるものとなった。実は Buchert (1989) [16] によって式 (1.10)~式 (1.12) と等価な  $u$  あるいは  $\delta$  に対しての 1 つの方程式が得られている。この方程式は、オイラー的な空間微分を含む非線形項の部分と、Lagrange 的な時間微分 (二階) を含む線形項の部分に分離されている。この非線形項は一次元運動においては恒等的にゼロとなっている。この非線形な非線形項をゼロとしたものが ZA に相当するのであるが、この項は空間の次元を上げるにつれ大きい値をとることが予想され、このことは結果 (iii) と矛盾せず、視点 (1) を支持するものである。一般的な場合にこの非線形項がどの程度の大きさであるかということが、ZA のよさを決定づけるひとつの指標となるであろうと考えられるので、今後この項の大きさを、今回の回転楕円体モデルの中で定量的に求めたい。