

## 4 Padé-Zel'dovich 近似

膨張宇宙の中の密度揺らぎの成長を分析するためには Zel'dovich-type 近似をするのが効果的であることが知られている。この Zel'dovich-type 近似は、Lagrange 的な描像での近似法であり、また、一次元厳密性を持っている。前章では Zel'dovich-type 近似がなぜそのようないい近似になっているのかということについて議論した。

一方、密度揺らぎの発展を Zel'dovich-type 近似法で求めたときの形は分数の形に展開していく Padé 近似の形とよく似ている。しかし Padé 近似と Zel'dovich 近似はまったく異なる近似法でこの両者を組合すことができる。それによってこれまでにないきわめてよい近似法をつくりだすことができる。この章ではこの新たな近似法、Padé-Zel'dovich 近似を紹介する。この章でも前章に引き続き回転楕円体モデルの中で議論する。

前章より Zel'dovich-type 近似の回転楕円体モデルでの形は、

$$\psi_{(1,2)}^{(1)} = \mp \frac{a^3 H^2 q_{(1,2)}}{2} (1 + h_{\text{in}}), \quad (4.1)$$

$$\psi_3^{(1)} = \mp \frac{a^3 H^2 q_3}{2} (1 - 2h_{\text{in}}), \quad (4.2)$$

$$\psi_{(1,2)}^{(2)} = -\frac{3a^6 H^4 q_{(1,2)}}{28} (1 + h_{\text{in}} - h_{\text{in}}^2 - h_{\text{in}}^3), \quad (4.3)$$

$$\psi_3^{(2)} = -\frac{3a^6 H^4 q_3}{28} (1 - 2h_{\text{in}} - h_{\text{in}}^2 + 2h_{\text{in}}^3), \quad (4.4)$$

$$\psi_{(1,2)}^{(3)} = \mp \frac{a^9 H^6 q_{(1,2)}}{504} (23 + 23h_{\text{in}} - 39h_{\text{in}}^2 - 25h_{\text{in}}^3 + 44h_{\text{in}}^4 + 30h_{\text{in}}^5), \quad (4.5)$$

$$\psi_3^{(3)} = \mp \frac{a^9 H^6 q_3}{504} (23 - 46h_{\text{in}} - 39h_{\text{in}}^2 + 92h_{\text{in}}^3 + 2h_{\text{in}}^4 - 60h_{\text{in}}^5), \quad (4.6)$$

ZA は  $\Psi_i = \Psi_i^{(1)}$ 、PZA は  $\Psi_i = \Psi_i^{(1)} + \Psi_i^{(2)}$ 、PPZA は  $\Psi_i = \Psi_i^{(1)} + \Psi_i^{(2)} + \Psi_i^{(3)}$  である。(3.25)-(3.27) からこれらの形が、展開形をしているので、これに Padé 近似を適用できることが分かる。Padé 近似は前章で紹介したように、ある関数の有限の  $M + N$  次までの展開が近似的に分かっているときに、2つの展開の比の形

$$f_{\text{Padé}(M,N)} \equiv \left( \sum_{k=0}^M a_k x^k \right) \left( 1 + \sum_{k=1}^N b_k x^k \right)^{-1}. \quad (4.7)$$

に書き直すことで近似の精度を上げようというものである。たとえば、PPZA の  $\Psi_1$  にこの

Padé 形を適用して、

$$\Psi_{1\text{ Padé}(1,2)} = \mp \frac{a(1+h_{\text{in}})q_1}{3} \left[ 1 \mp \frac{a(1-h_{\text{in}}^2)}{7} - \frac{a^2(80-111h_{\text{in}}^2+98h_{\text{in}}^3+129h_{\text{in}}^4)}{3969} \right]^{-1} \quad (4.8)$$

$$\Psi_{1\text{ Padé}(2,1)} = \mp \frac{a(1+h_{\text{in}})q_1}{21} \left[ 567(1-h_{\text{in}}) \mp a(80-80h_{\text{in}}-31h_{\text{in}}^2+129h_{\text{in}}^3) \right] \times \\ \left[ 81(1-h_{\text{in}}) \mp a(23-23h_{\text{in}}-16h_{\text{in}}^2+30h_{\text{in}}^3) \right]^{-1}, \quad (4.9)$$

PPZA は三次なので、(1, 2) タイプと (2, 1) タイプの二種類作ることができる。図 4.2、図 4.3 に Zel'dovich-type 近似といっしょに PZA、PPZA に Padé 近似を施したもの（以下 PadéPZA、PadéPPZA）をプロットしてある。プロットのルールはそれぞれ前章の図 3.6、図 3.7 と同様である。 $\alpha_{\text{in}3}/\alpha_{\text{in}1} = 1$  のときは球対称のときであるが、この時の  $\delta_{\text{true}}$  に対する  $\delta_{\text{approx}}$  のふるまいを図 4.1 に示してある。

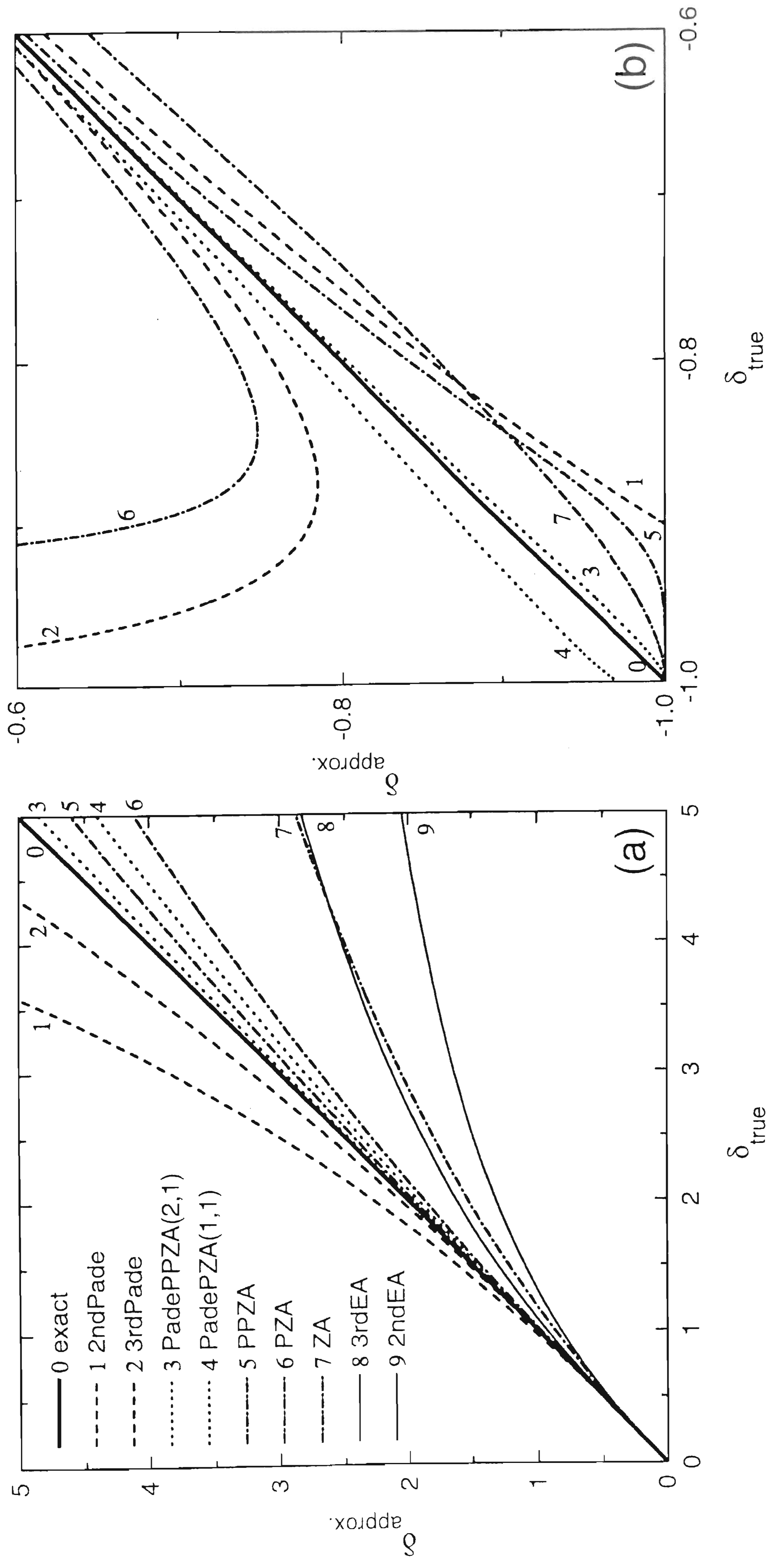


図 4.1: 球対称モデル ( $\frac{\alpha_{\text{in}3}}{\alpha_{\text{in}1}} = 1$ ) での数値的真的解と近似解の比較: (左) 正の揺らぎ (右) 負の揺らぎ

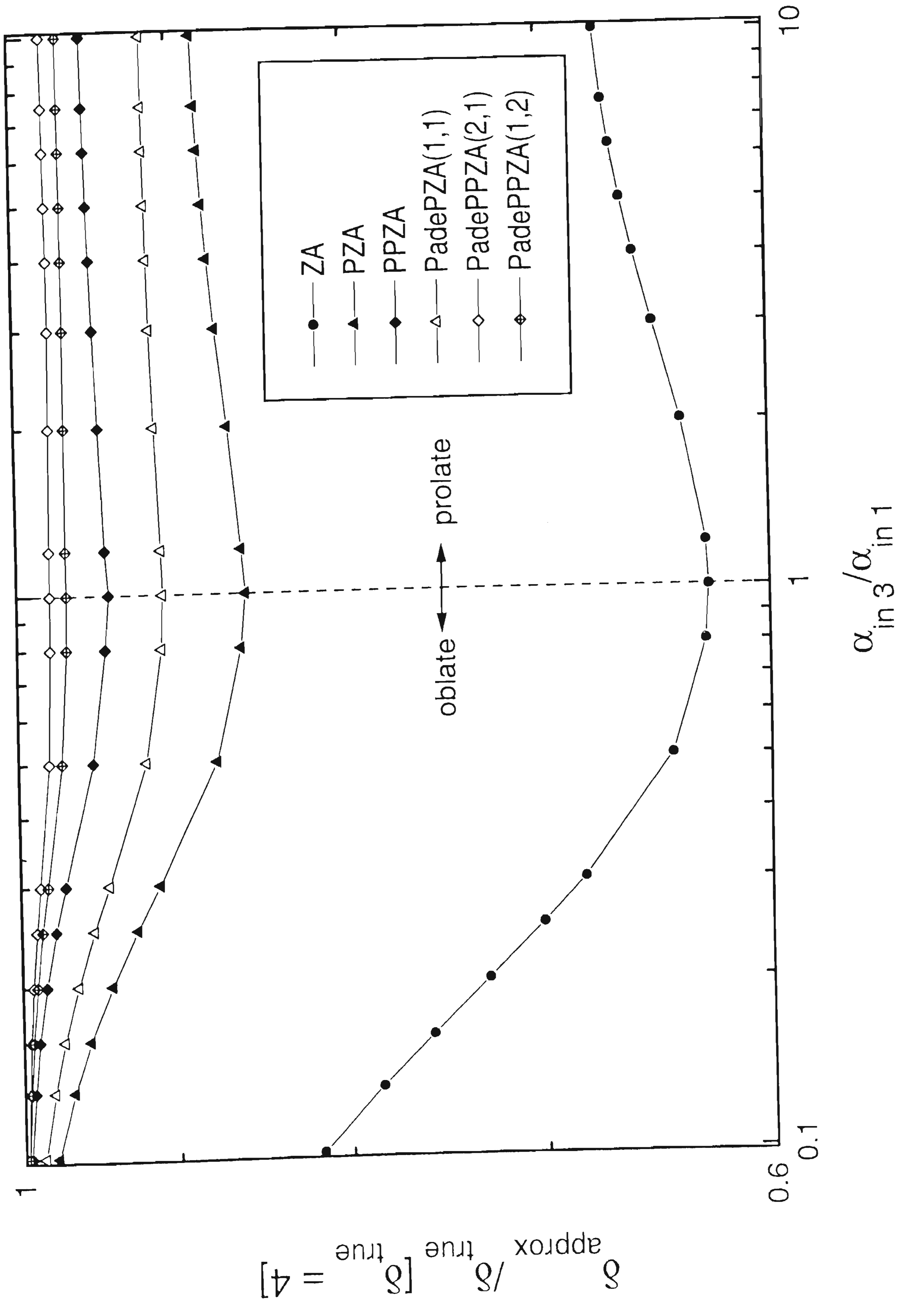


図 4.2:  $\delta_{\text{true}} = 4$  のときの、各近似での  $\delta_{\text{approx}} / \delta_{\text{true}}$ 。横軸は楕円体の初期軸比である。

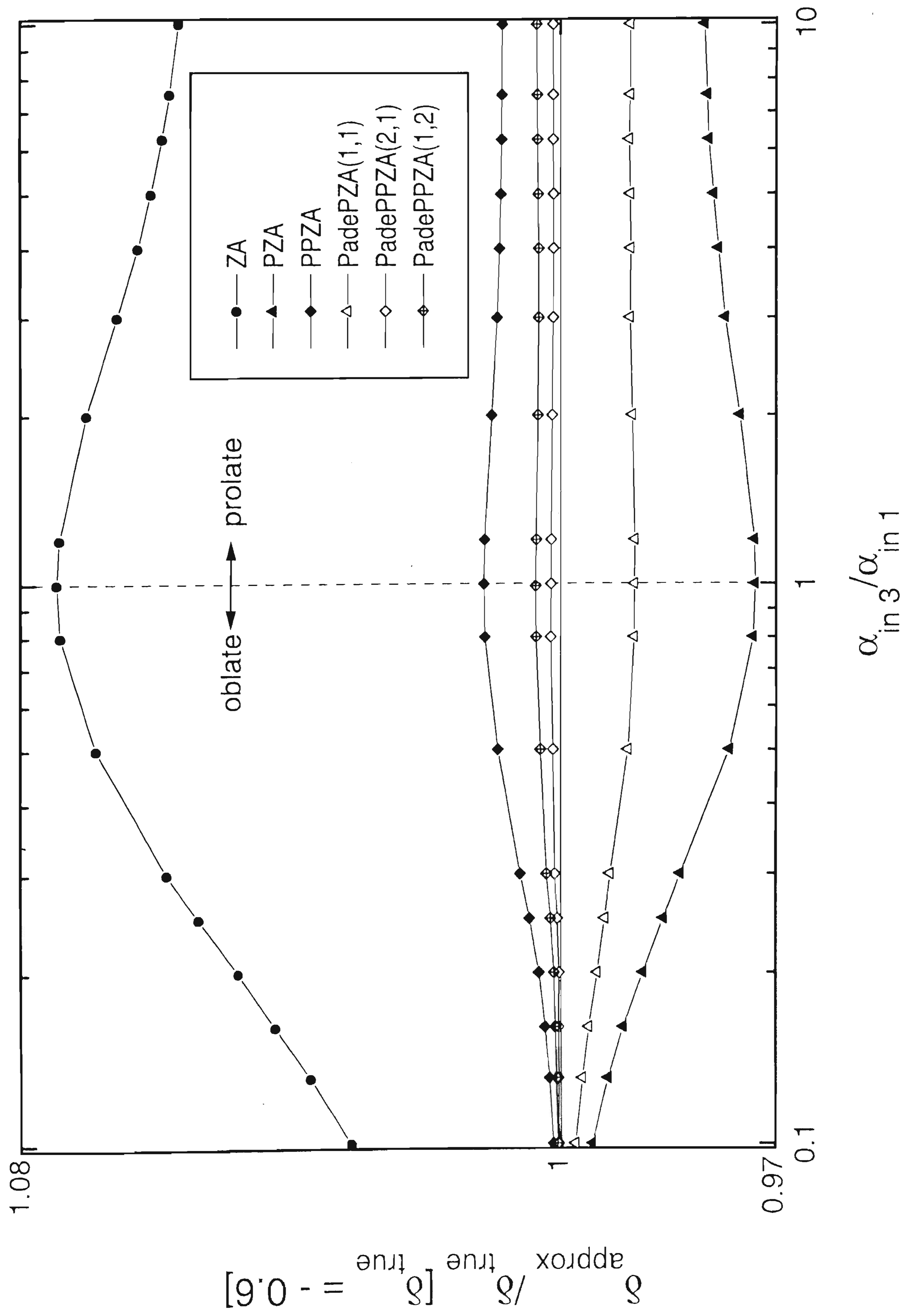


図 4.3:  $\delta_{\text{true}} = -0.6$  のときの、各近似での  $\delta_{\text{approx}} / \delta_{\text{true}}$ 。横軸は楕円体の初期軸比である。

これら図 4.1～図 4.3と、式(4.8)、(4.9)より以下の結果が読み取れる。

- (i) PadéPPZA は揺らぎの正負にかかわらず、すべての初期軸比 $\alpha_{in\ 3}/\alpha_{in\ 1}$ において他のどの近似法より正確な近似法になっている。その中でも特に正の揺らぎに対してよりも負の揺らぎに対しての方が近似の精度が劇的によくなっている事がわかる。
- (ii) ZTA と Padé 近似のある曲線(図 4.1 (右) の 2 と 6) は徐々に $\delta_{approx.}$  から離れていってしまうような振る舞いをしてしまう。一方、この乱暴な振る舞いは、Padé 形の ZTA では抑制することに成功している。
- (iii) 揺らぎが正のとき Padé PPZA の式(4.8)、(4.9)は密度揺らぎの式を構成したときは PPZA に比べてとても複雑な極を持っている。実際、 $l \rightarrow \infty$  で $\delta_{approx.} \rightarrow \infty$  となる前に(2,1)-Padé PPZA には四つ、(1,2)-Padé PPZA には二つ存在する。このことは最初の shell crossing 以降に、 $\delta_{approx.}$  にも何度かのバウンスが存在することを示している。(ただし、極の位置も、バウンス後の $\delta_{approx.}$  の最小値も三次までというこの低い次数では正しい値を記述してはいない。)
- (iv) 図に示されているすべての近似法は oblate の極限、つまり一次元の極限で厳密解に収束している。

結果(i)は Padé 形 ZTA が、定量的に優れていることを示している。特に負の揺らぎに対しての近似のよさは注目すべきで、 $\delta_{true} = -0.6$  に対して、PadéPPZA は PPZA の約六倍もよさを改善している。さらに結果(ii)、(iii)は Padé 形 ZTA の定性的なよさを証明している。特に(iii)は ZTA と比べて注目すべき対照的な点である。ZTA にはそのようなバウンスは存在しない。最後の結果(iv)は単純に Padé 近似も Zel'dovich-type 近似も両方とも一次元厳密性を持っているという事実を反映している。実際に、式((4.8)、(4.9)から求めた密度揺らぎ $\delta_{approx.}$ は、一次元的 collapse( $h_{in} \rightarrow -1$ )で厳密解 $\delta = \pm a/(1 \mp a)$ に収束している。

以上のことからまとめると新しく作り出せたこの Padé-Zel'dovich 近似は実際の宇宙での構造形成に対して、これまで議論されてきたさまざまな近似法と比べて、定量的にも定性的にも非常に優れた近似法になっていることが分かる。今後この Padé-Zel'dovich 近似を宇宙

の構造形成にともなうさまざまな量の時間発展に適用することで、重力不安定性に対するより解析的な議論ができ、重力の性質の本質を考察することができるであろう。