

5 Pairwise Peculiar Velocity Distribution Function

前章までで、準非線形領域における宇宙の密度揺らぎの時間発展を追う上では、Zel'dovich-type 近似法が精度の高い近似法であることを示すとともに、なぜそれら ZTA がよい近似になっているのかということも議論した。よって次の興味は、その ZTA を使って大規模構造の形成にともなう密度揺らぎ以外の物理量の時間発展に ZTA を適用した場合、どのような性質を記述することができるのかということである。

この章では、ZTA の中でも最も単純な一次の ZA を使って、準非線形領域での銀河の相対速度確率分布関数の発展を求め、それに付随する物理的性質を見ていく。この章でも引き続き EDS 宇宙の中で議論する。

今 \mathbf{r} だけ離れた二つの銀河を考える。それぞれの持つ固有速度を \mathbf{v}_1 、 \mathbf{v}_2 とすると、相対速度を

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}, \quad (5.1)$$

と書くことができる。 v_{\parallel} は \mathbf{r} に平行な成分、 v_{\perp} は \mathbf{r} に垂直な成分で、それぞれ縦速度、横速度と呼ぶことにする。これらのそれぞれの速度に対しての確率分布関数を考える。

銀河同士の相対速度場は、宇宙の初期や重力的相互作用の影響がほとんど効かないであろうと思われるような大スケールに着目した場合には、一様かつランダムであると考えられる。この場合の縦速度と横速度の確率分布関数は、ともにガウス分布になると考えてよい。一方これに対して準非線形領域では構造形成の過渡期にあり、多くの銀河が重力によって互いに引き寄せ合い集団化しつつある状態であると考えられる。従ってこの場合は相対速度場はガウス分布からずれることが予想される。とりわけ縦速度の確率分布関数は、銀河の集団化を反映して、図 5.1 のように負に歪んだ形になると予想される。

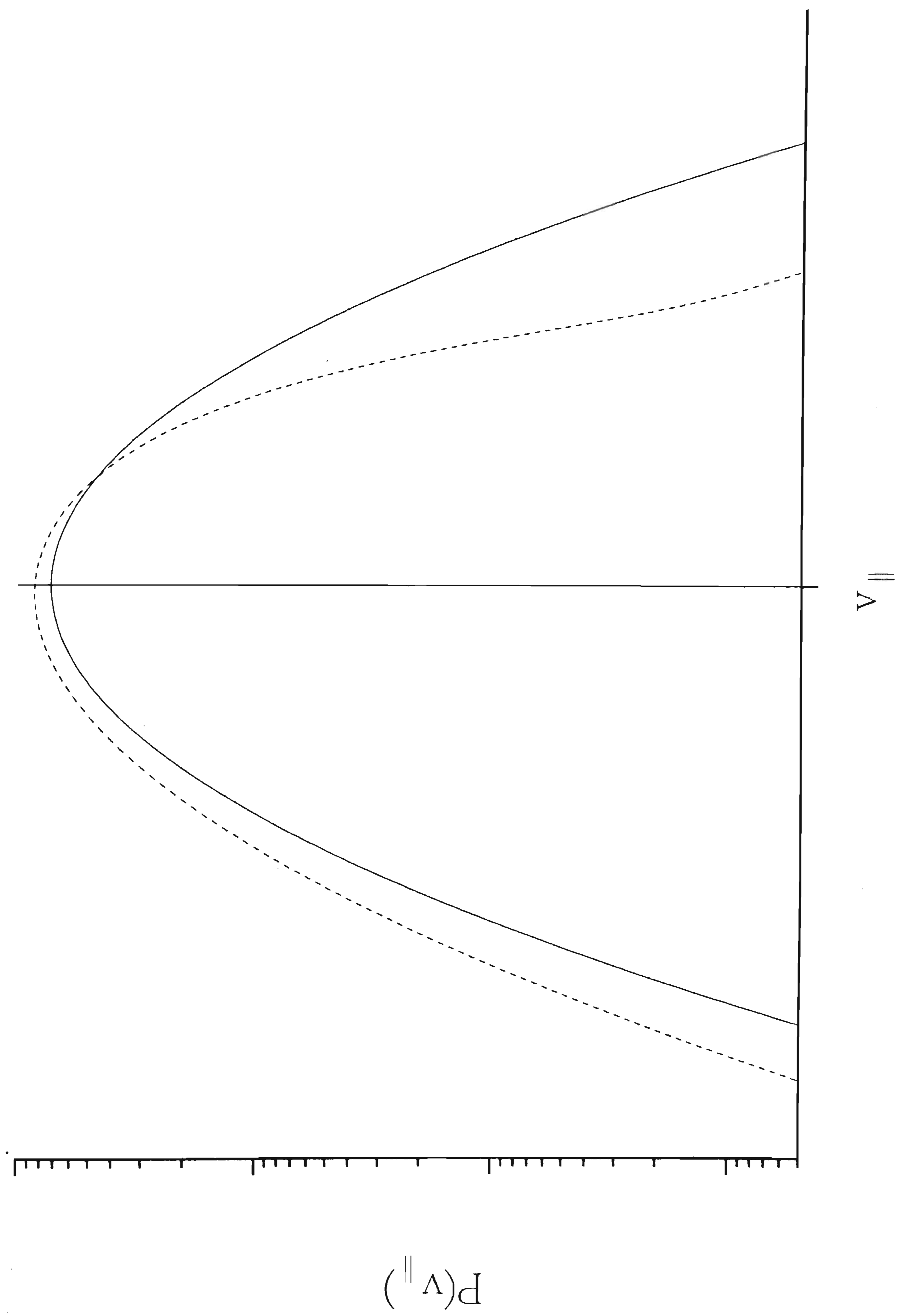


図 5.1: 確率分布関数の負の歪み度のイメージ

Fisher et al. (1994) [36] Zurek et al. (1994) [38] らによってN体数値計算で縦速度確率分布がガウス分布に比べて左右対称ではなく、負に歪んだ結果が得られている。Fisherらの結果では、この縦速度確率分布関数の負の歪み度は準非線形領域で大きく、非線形性の強い小さなスケールでは、縦速度確率分布関数は左右対称な形になっている。この縦速度確率分布関数の負の歪み度は、前述のように直感的には構造形成過程の効果として表れているものと思われる。ただN体数値計算では、この重要な性質に対してこのように興味深い結果が得られたとしてもなぜそのような結果になったのかという物理的起源は見えてこない。これらの速度確率分布関数に対する結果が構造形成における重力的不安定性のどのような物理的性質を反映しているのかという疑問に対する議論をするためにはできるだけ解析的に取り扱うことが必要である。

そこでこの章では準非線形近似法であるZAを用いて議論をしていく。ZAはその単純さからいろいろな定性的な振る舞いをより解析的に議論でき、背景にある物理を理解できることが期待できるのである。ZAでは物体は、初期の線形な密度揺らぎの空間分布が作り出す重力ポテンシャルによって受ける力の方向に直線運動するという近似になっている。つまり、速度ベクトルは、初期の重力ポテンシャルの勾配に比例したものになっているのである。初期には、各銀河はその場の重力ポテンシャルの勾配に従って

$$\mathbf{v} = \mathbf{g}t \quad (5.2)$$

で集団化しようとしている。 \mathbf{g} は重力ポテンシャルから決まる固有重力加速度である。ZAではその情報を保持したまま時間発展するので、ZAが近似として成り立っている範囲においては銀河は集団化しようとして動きつづけ、縦速度の確率分布は負に歪むと考えられる。

また上述のN体数値計算ではガウス分布に比べて縦速度確率分布が指数関数的 ($\sim e^{-|v|}$) なテイルを持っているという結果が得られている。実は1976年にPeeblesによって最初に、この縦速度確率分布関数が指数関数形であるということが提案されたのであるが、最近二点相関関数 ξ の観測から、Davis et al. (1983) [44]、Marzke et al. (1995) [45] たちによって、赤方偏移空間での $\xi(s)$ から実空間での $\xi(r)$ へのfitting関数である縦速度確率分布関数に対して指数関数形がガウス分布などの他の分布に比べてよくfitするという、縦速度確率分

布の形に対する指数関数形を支持する間接的結果が得られている。このように実は、固有速度確率分布関数、中でもとりわけ縦速度確率分布関数は、観測された銀河同士の構造形成の性質、つまり赤方偏移空間での情報を、実空間でのものに翻訳する上でも大きな役割を担っている。但しこれら、観測結果からの議論においては縦速度確率分布関数の負の歪み度には着目していない。また、観測で見ているスケールは準非線形領域に比べてもっと非線形性の強い小さいスケールである。

この章では、ZA によって速度確率分布関数のどのような物理的性質を記述できるかということの特に関心し、解析的に議論する。ただし、ZA はあくまでも近似法であるので、その適用妥当性に対しては当然のことながら充分注意が必要であり、議論は近似の適用範囲内においてのものでなければならない。そのためにもまず ZA の適用範囲を考察し、そのなかで議論を進めていく。

5.1 ZA を使った確率分布関数の時間発展

5.1.1 解析解

Seto & Yokoyama (1998) [39] によって相対固有速度の縦速度に対する確率分布関数が ZA を使って解析的に求められ、1~10Mpc のスケールにおいて議論されている。ここでは同じく ZA を用い相対固有速度の確率分布関数として、縦速度、横速度それぞれの結合確率分布関数 $P(v_{\parallel}, v_{\perp} | r, t)$ を考え、解析的に発展を追う。ここで、横速度には特別な方向は存在しないと考えるので、 $\mathbf{v}_{\perp} = (v_{\perp x}, v_{\perp y})$ に対しては、等方性を仮定し、 $v_{\perp} = \sqrt{v_{\perp x}^2 + v_{\perp y}^2}$ とした。これを v_{\perp} で積分したものが縦速度確率分布関数 $P(v_{\parallel} | r, t)$ 、これを v_{\parallel} で積分したものが横速度確率分布関数 $P(v_{\perp} | r, t)$ である。また、規格化条件として

$$\int P(v_{\parallel}, v_{\perp} | r, t) dv_{\parallel} 2\pi v_{\perp} dv_{\perp} = \xi(r, t) + 1, \quad (5.3)$$

となるようにとる。ここで $\xi(r)$ は二点相関関数である。

この確率分布関数 $P(v_{\parallel}, v_{\perp} | r, t)$ の時間発展を ZA をつかって解析的に求める。

いま

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 = \mathbf{q}_1 + D(t) \boldsymbol{\psi}_1, \\ \mathbf{x}_2 = \mathbf{q}_2 + D(t) \boldsymbol{\psi}_2, \end{cases} \quad (5.4)$$

にある二つの銀河同士の相対運動を考える。ここで、 $\psi_1 = \psi(\mathbf{q}_1)$ 、 $\psi_2 = \psi(\mathbf{q}_2)$ である。それぞれの速度を \mathbf{v}_1 、 \mathbf{v}_2 として、

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \end{cases} \quad (5.5)$$

とおき、さらに $\mathbf{q} = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1$ 、 $\psi_{12} = \psi_2 - \psi_1$ とおくと、相対位置、相対速度にたいしてのZAの式

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{q} + D(t) \psi_{12}(\mathbf{q}), \\ \mathbf{v} = \dot{D} \psi_{12}(\mathbf{q}), \end{cases} \quad (5.6)$$

が得られる。ZAは直線運動をするので、二つの銀河同士の相対運動は、二点間の距離ベクトルと、相対速度ベクトルを含む平面内で議論できる。ここで $\mathbf{v}(t)$ を常に二点間の距離ベクトル $r(t)$ に対して、平行成分（縦速度） $v_{\parallel}(t)$ と、垂直成分（横速度） $v_{\perp}(t)$ とに分けて考える。

さて、微少空間内にある粒子数は保存されているので、

$$\begin{aligned} P(v'_{\parallel}, v'_{\perp} | r', t + dt) dv'_{\parallel} 2\pi v'_{\perp} dv'_{\perp} 4\pi r'^2 dr' \\ = P(v_{\parallel}, v_{\perp} | r, t) dv_{\parallel} 2\pi v_{\perp} dv_{\perp} 4\pi r^2 dr, \end{aligned} \quad (5.7)$$

が成り立っている。まず $dv_{\parallel} 2\pi v_{\perp} dv_{\perp} 4\pi r^2 dr$ の時間発展を求める。そのために、 v'_{\parallel} 、 v'_{\perp} 、 r' の微小時間 dt に対する発展をZAを用いて v_{\parallel} 、 v_{\perp} 、 r によって記述する。

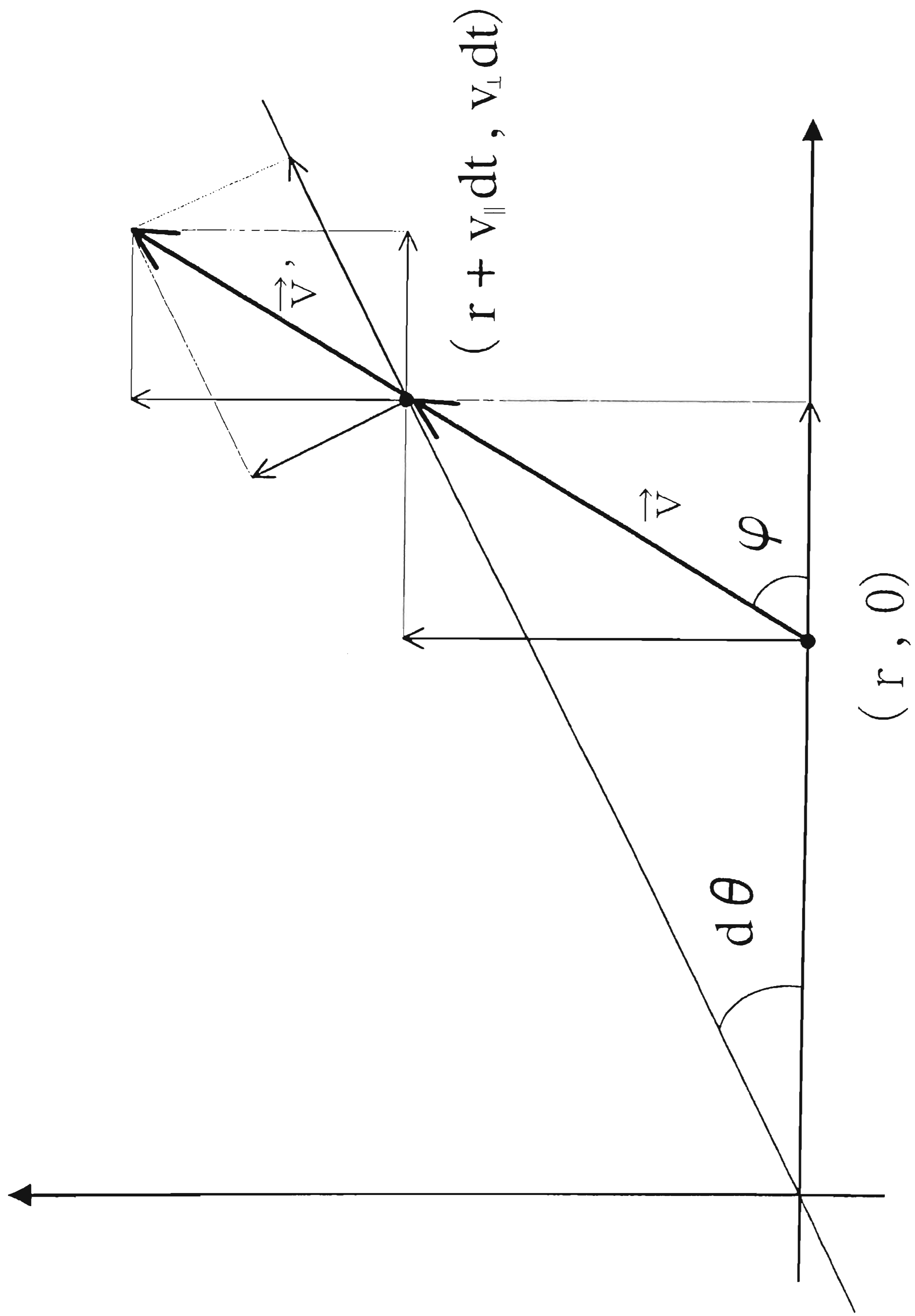


図 5.2: ZA での運動の微小時間変化

図 5.2のように現時刻 t で位置 $\mathbf{r} = (x, y) = (r, 0)$ 、速度 $\mathbf{v} = \dot{D}\psi = (\dot{D}\psi_x, \dot{D}\psi_y) = (v_x, v_y) = (v_{\parallel}, v_{\perp})$ にある銀河が、 $t + dt$ では同じ座標系で $\mathbf{r}' = (x', y')$ 、 $\mathbf{v}' = (v'_x, v'_y)$ に移動しているという状態を考える。すると、ZAにおける速度の微小時間発展は、 dt の一次まで求めると、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}' = \mathbf{v}(t + dt) = \dot{D}(t + dt)\psi &= \left(\dot{D}(t) + \ddot{D}(t)dt + \dots \right) \psi \\
 &= \mathbf{v}(t) + \frac{\ddot{D}}{\dot{D}} \mathbf{v}(t) dt \dots \\
 &= \left(\left(1 + \frac{\ddot{D}}{\dot{D}} dt \dots \right) v_{\parallel}, \left(1 + \frac{\ddot{D}}{\dot{D}} dt \dots \right) v_{\perp} \right) \\
 &= (v'_x, v'_y), \tag{5.8}
 \end{aligned}$$

となる。ここで図より、

$$\begin{cases} v_{\parallel} = v_x = v \cos \varphi, \\ v_{\perp} = v_y = v \sin \varphi, \end{cases} \tag{5.9}$$

および、

$$\begin{cases} v'_x = v' \cos \varphi, \\ v'_y = v' \sin \varphi, \end{cases} \tag{5.10}$$

と書くことができる。この (v'_x, v'_y) から新たに \mathbf{r}' に対して平行な成分、垂直な成分を取り直して $(v'_{\parallel}, v'_{\perp})$ を求める。このことは、座標系を $d\theta$ だけ回転させることに対応している。ここで $d\theta \ll 1$ のとき $d\theta \cong \frac{v_{\perp}}{r} dt$ であるので、

$$\begin{aligned}
 v'_{\parallel} = v' \cos(\varphi - d\theta) &= v' (\cos \varphi \cos d\theta + \sin \varphi \sin d\theta) \\
 &= v'_x \cos d\theta + v'_y \sin d\theta \\
 &= \left(1 + \frac{\ddot{D}}{\dot{D}} dt \right) v_{\parallel} \cos d\theta + \left(1 + \frac{\ddot{D}}{\dot{D}} dt \right) v_{\perp} \sin d\theta \\
 &\cong \left(1 + \frac{\ddot{D}}{\dot{D}} dt \right) v_{\parallel} + \left(1 + \frac{\ddot{D}}{\dot{D}} dt \right) v_{\perp} d\theta \\
 &= v_{\parallel} + \left(\frac{\ddot{D}}{\dot{D}} v_{\parallel} + \frac{v_{\perp}^2}{r} \right) dt, \tag{5.11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v'_{\perp} = v' \sin(\varphi - d\theta) &= v' (\sin \varphi \cos d\theta - \cos \varphi \sin d\theta) \\
 &= -v'_x \sin d\theta + v'_y \cos d\theta,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\left(1 + \frac{\ddot{D}}{\dot{D}} dt\right) v_{\parallel} \sin d\theta + \left(1 + \frac{\ddot{D}}{\dot{D}} dt\right) v_{\perp} \cos d\theta \\
&\cong -\left(1 + \frac{\ddot{D}}{\dot{D}} dt\right) v_{\parallel} d\theta + \left(1 + \frac{\ddot{D}}{\dot{D}} dt\right) v_{\perp} \\
&= v_{\perp} + \left(\frac{\ddot{D}}{\dot{D}} v_{\perp} - \frac{v_{\perp} v_{\parallel}}{r}\right) dt,
\end{aligned} \tag{5.12}$$

さらに r' に対しては、

$$\begin{aligned}
r' &= \sqrt{(r + v_{\parallel} dt)^2 + (v_{\perp} dt)^2} = \sqrt{r^2 + 2rv_{\parallel} dt + (v_{\parallel} dt)^2 + (v_{\perp} dt)^2} \\
&= r \sqrt{1 + 2\frac{v_{\parallel}}{r} dt + \frac{v^2}{r^2} dt^2} \\
&\cong r \left(1 + \frac{v_{\parallel}}{r} dt\right) \\
&= r + v_{\parallel} dt,
\end{aligned} \tag{5.13}$$

と求まる。ヤコビアン $Y = \frac{\partial(v'_{\parallel}, v'_{\perp}, r')}{\partial(v_{\parallel}, v_{\perp}, r)}$ は、

$$Y = \begin{vmatrix} \frac{\partial v'_{\parallel}}{\partial v_{\parallel}} & \frac{\partial v'_{\parallel}}{\partial v_{\perp}} & \frac{\partial v'_{\parallel}}{\partial r} \\ \frac{\partial v'_{\perp}}{\partial v_{\parallel}} & \frac{\partial v'_{\perp}}{\partial v_{\perp}} & \frac{\partial v'_{\perp}}{\partial r} \\ \frac{\partial r'}{\partial v_{\parallel}} & \frac{\partial r'}{\partial v_{\perp}} & \frac{\partial r'}{\partial r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\ddot{D}}{\dot{D}} dt & 2\frac{v_{\perp}}{r} dt & -\frac{v_{\perp}^2}{r^2} dt \\ -\frac{v_{\perp}}{r} dt & 1 + \frac{\ddot{D}}{\dot{D}} dt - \frac{v_{\parallel}}{r} dt & \frac{v_{\perp} v_{\parallel}}{r^2} dt \\ dt & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{5.14}$$

となるので、微小体積の時間発展は、

$$dv'_{\parallel} dv'_{\perp} dr' = Y dv_{\parallel} dv_{\perp} dr = \left(1 + 2\frac{\ddot{D}}{\dot{D}} dt - \frac{v_{\parallel}}{r} dt\right) dv_{\parallel} dv_{\perp} dr. \tag{5.15}$$

さらに、

$$\begin{aligned}
2\pi v'_{\perp} &= 2\pi v_{\perp} \left(1 + \frac{\ddot{D}}{\dot{D}} dt - \frac{v_{\parallel}}{r} dt\right), \\
4\pi r'^2 &= 4\pi r^2 \left(1 + \frac{v_{\parallel}}{r} dt\right)^2 \cong 4\pi r^2 \left(1 + 2\frac{v_{\parallel}}{r} dt\right),
\end{aligned} \tag{5.16}$$

従って $dv_{\parallel} 2\pi v_{\perp} dv_{\perp} 4\pi r^2 dr$ の時間発展は、

$$\begin{aligned}
&dv'_{\parallel} 2\pi v'_{\perp} dv'_{\perp} 4\pi r'^2 dr' \\
&= \left(1 + 2\frac{\ddot{D}}{\dot{D}} dt - \frac{v_{\parallel}}{r} dt\right) \left(1 + \frac{\ddot{D}}{\dot{D}} dt - \frac{v_{\parallel}}{r} dt\right) \left(1 + 2\frac{v_{\parallel}}{r} dt\right) dv_{\parallel} 2\pi v_{\perp} dv_{\perp} 4\pi r^2 dr \\
&\cong \left(1 + 3\frac{\ddot{D}}{\dot{D}} dt\right) dv_{\parallel} 2\pi v_{\perp} dv_{\perp} 4\pi r^2 dr,
\end{aligned} \tag{5.17}$$

となり、これを初期時刻 t_i で $D = D_i$ という条件を与えて解いて、

$$dv_{\parallel} 2\pi v_{\perp} dv_{\perp} 4\pi r^2 dr = \left(\frac{\dot{D}}{D_i}\right)^3 dv_{\parallel,i} 2\pi v_{\perp,i} dv_{\perp,i} 4\pi r_i^2 dr_i. \quad (5.18)$$

結局ZAでの $P(v_{\parallel}, v_{\perp}|r, t)$ の時間発展を表す式は

$$P(v_{\parallel}, v_{\perp}|r, t) = \left(\frac{\dot{D}_i}{D}\right)^3 P(v_{\parallel,i}, v_{\perp,i}|r_i, t_i), \quad (5.19)$$

となる。よって次に $r_i, v_{\parallel,i}, v_{\perp,i}$ を $r, v_{\parallel}, v_{\perp}$ で記述すればよい。

(5.6)の二式目より、

$$\mathbf{v}_i = \dot{D}_i \psi, \quad (5.20)$$

よって、

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i = \mathbf{x} - \frac{D}{\dot{D}} \mathbf{v}, \\ \mathbf{v}_i = \frac{\dot{D}_i}{\dot{D}} \mathbf{v}, \end{cases} \quad (5.21)$$

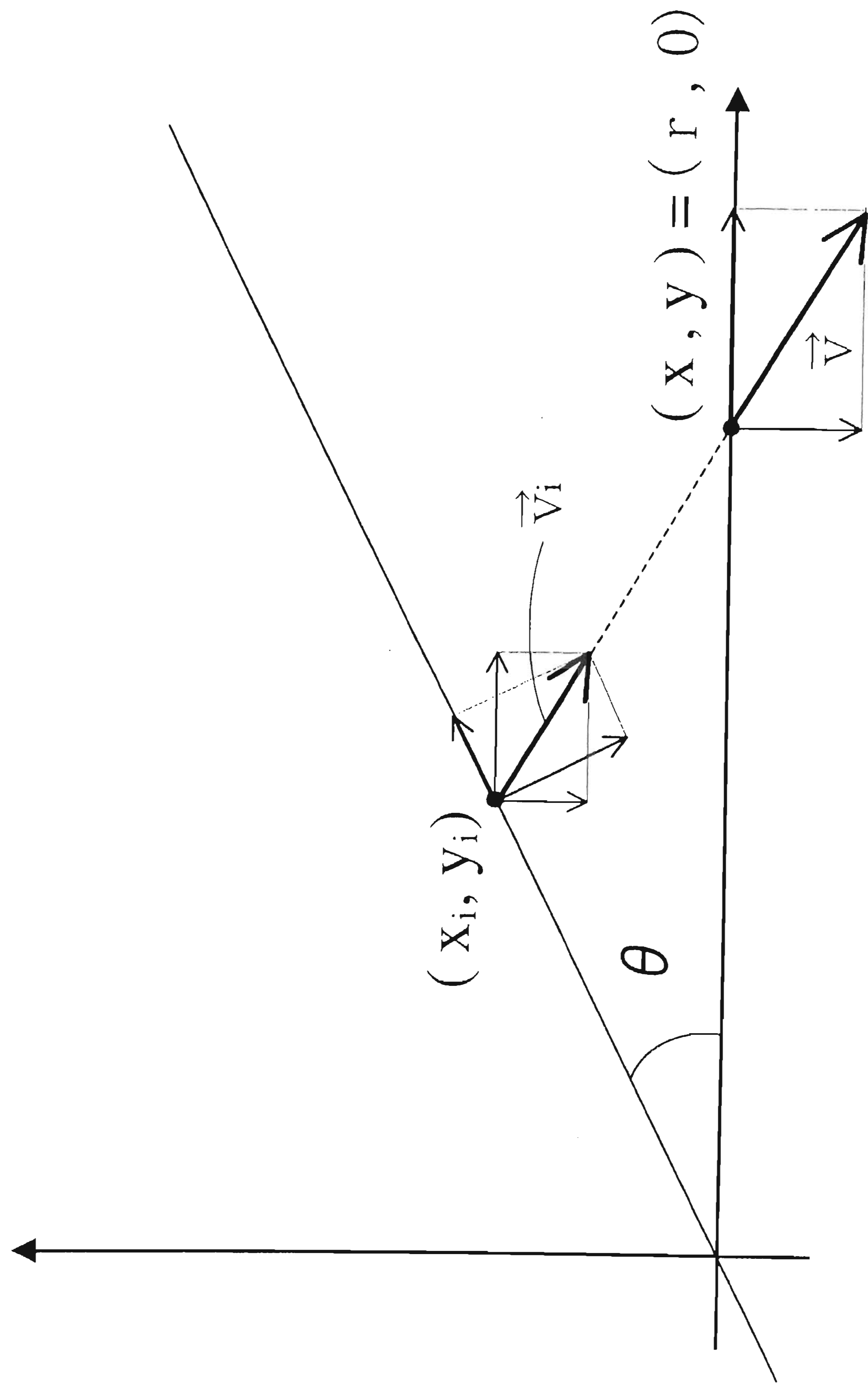


図 5.3: ZA での運動の初期からの変化

さきほどとは逆に、図 5.3 のように現時刻で $(x, y) = (r, 0)$ 、 $(v_x, v_y) = (v_{\parallel}, v_{\perp})$ のものが初期には同じ座標系内で (x_i, y_i) 、 $(v_{x,i}, v_{y,i})$ にあったと考えると、

$$\begin{cases} x_i = r - \frac{D}{\dot{D}} v_{\parallel}, \\ y_i = -\frac{D}{\dot{D}} v_{\perp}, \end{cases} \quad (5.22)$$

および、

$$\begin{cases} v_{x,i} = \frac{\dot{D}_i}{\dot{D}} v_{\parallel}, \\ v_{y,i} = \frac{\dot{D}_i}{\dot{D}} v_{\perp}, \end{cases} \quad (5.23)$$

と書くことができる。よって、初期の相対距離 r_i は、

$$r_i = \sqrt{\left(r - \frac{D}{\dot{D}} v_{\parallel}\right)^2 + \left(\frac{D}{\dot{D}} v_{\perp}\right)^2} \quad (5.24)$$

となる。これにより、

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x_i}{r_i} = \frac{r}{r_i} - \frac{D v_{\parallel}}{\dot{D} r_i}, \\ \sin \theta = \frac{y_i}{r_i} = -\frac{D v_{\perp}}{\dot{D} r_i}, \end{cases} \quad (5.25)$$

を使って、結局 $v_{\parallel,i}$ 、 $v_{\perp,i}$ は

$$\begin{cases} v_{\parallel,i} = \cos \theta v_{x,i} + \sin \theta v_{y,i} = \frac{\dot{D}_i}{\dot{D}} \left(\frac{r v_{\parallel}}{r_i} - \frac{D}{\dot{D}} \frac{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}{r_i} \right) \\ v_{\perp,i} = -\sin \theta v_{x,i} + \cos \theta v_{y,i} = \frac{\dot{D}_i}{\dot{D}} \frac{r v_{\perp}}{r_i} \end{cases} \quad (5.26)$$

となる。つまり時刻 t_i における確率分布 $P(v_{\parallel,i}, v_{\perp,i} | r_i, t_i)$ が初期条件として与えられた場合、時刻 t における確率分布 $P(v_{\parallel}, v_{\perp} | r, t)$ は、式 (5.19) , (5.24) , (5.26) を用いて得ることができる。

5.1.2 初期条件

ここで、線形理論と渦なしの一様等方ランダムなベクトル場の理論より確率分布関数の初期条件 $P(v_{\parallel,i}, v_{\perp,i} | r_i, t_i)$ を求める。初期の線形重力場においては速度場は渦無しであると考えて問題は無い。線形重力場では渦項は減衰モードなので寄与は無視できるのである (参考: 2.2)。

まず、初期の確率分布関数の形はガウス分布であると考えられる。

$$P(v_{\parallel,i}, v_{\perp,i} | r_i, t_i) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 Q_{\parallel}(r_i) Q_{\perp}(r_i)^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{v_{\parallel,i}^2}{Q_{\parallel}(r_i)} + \frac{v_{\perp,i}^2}{Q_{\perp}(r_i)} \right) \right] \quad (5.27)$$

よって初期の分散 Q_{\parallel} 、 Q_{\perp} を求めればよい。

宇宙のどこでも速度分散は等しいという等方性より、 r だけ離れた二つの銀河の相対速度の分散は、

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}))^2 \rangle &= \langle \mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{r})^2 \rangle - 2 \langle \mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rangle + \langle \mathbf{v}(\mathbf{x})^2 \rangle \\ &= 2 \langle \mathbf{v}(\mathbf{x})^2 \rangle - 2 \langle \mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rangle, \end{aligned} \quad (5.28)$$

のように、一点速度分散と二点速度相関の和として記述できる。よって、 $Q_{\parallel}(r)$ 、 $Q_{\perp}(r)$ は、

$$\begin{aligned} Q_{\parallel} &= \langle (v_{\parallel}(x+r) - v_{\parallel}(x))^2 \rangle \\ &= 2 \langle v_{\parallel}(x)^2 \rangle - 2 \langle v_{\parallel}(x+r) v_{\parallel}(x) \rangle \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} Q_{\perp} &= \langle (v_{\perp}(x+r) - v_{\perp}(x))^2 \rangle \\ &= 2 \langle v_{\perp}(x)^2 \rangle - 2 \langle v_{\perp}(x+r) v_{\perp}(x) \rangle \end{aligned} \quad (5.30)$$

となる。初期宇宙における速度場は渦なしで等方的なランダム場であると考えられる。この場合 Monin and Yaglom (1975) [33] より、

$$\begin{cases} \langle v_{\parallel}(x) v_{\parallel}(x+r) \rangle = 2 \int_0^{\infty} \left[\frac{\sin(kr)}{kr} + 2 \frac{\cos(kr)}{(kr)^2} - 2 \frac{\sin(kr)}{(kr)^3} \right] E(k) dk \\ \quad = 2 \int_0^{\infty} \left[j_0(kr) - 2 \frac{j_1(kr)}{kr} \right] E(k) dk = B_{\parallel}(r), \\ \langle v_{\perp}(x) v_{\perp}(x+r) \rangle = 2 \int_0^{\infty} \left[-\frac{\cos(kr)}{(kr)^2} + \frac{\sin(kr)}{(kr)^3} \right] E(k) dk \\ \quad = 2 \int_0^{\infty} \left[\frac{j_1(kr)}{kr} \right] E(k) dk = B_{\perp}(r), \end{cases} \quad (5.31)$$

である。ここで球ベッセル関数

$$\begin{cases} j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \\ j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}, \end{cases} \quad (5.32)$$

を用いた。 $E(k)$ は、速度場のパワースペクトルで、

$$\frac{1}{2} \langle |\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 \rangle = \int E(k) dk, \quad (5.33)$$

である。一方、線形理論では、Peebles(1980) [1]より線形の世界速度場は、線形の世界密度場で簡単に記述できて、

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_i) = i \frac{\dot{D}_i}{D_i} \int \frac{\mathbf{k}}{k^2} \tilde{\delta}(\mathbf{k}, t_i) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}, \quad (5.34)$$

となる。 $\tilde{\delta}(\mathbf{k})$ は密度揺らぎのフーリエ成分である。これにより、

$$\begin{aligned} \langle |\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_i)|^2 \rangle &= \left(\frac{\dot{D}_i}{D_i} \right)^2 \int \left(\frac{\mathbf{k}}{k^2} \right) \left(\frac{\mathbf{k}'}{k'^2} \right)^* \langle \tilde{\delta}(\mathbf{k}, t_i) \tilde{\delta}(\mathbf{k}', t_i)^* \rangle e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{x}} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^{3/2}} \\ &= 4\pi \left(\frac{\dot{D}_i}{D_i} \right)^2 \int P_i(k) dk, \end{aligned} \quad (5.35)$$

となる。 $P_i(k)$ は初期の世界密度場のパワースペクトルで、定義より

$$\langle \tilde{\delta}(\mathbf{k}, t_i) \tilde{\delta}(\mathbf{k}', t_i)^* \rangle = P_i(k) dk (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (5.36)$$

である。結局、(5.35)、(5.33)より、

$$E(k) = 2\pi \left(\frac{\dot{D}_i}{D_i} \right)^2 P_i(k), \quad (5.37)$$

と、線形理論から速度場と世界密度場のパワースペクトルを結び付ける事が出来る。よって、縦速度、横速度の初期の分散は

$$\begin{aligned} Q_{\parallel}(r_i) &= 2(B_{\parallel}(0) - B_{\parallel}(r_i)) \\ &= \frac{8\pi}{3} \left(\frac{\dot{D}_i}{D_i} \right)^2 \int dk P_i(k) \left[1 - 3j_0(kr_i) + 6 \frac{j_1(kr_i)}{kr_i} \right] = \left(\frac{\dot{D}_i}{D_i} \right)^2 S_{\parallel}, \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} Q_{\perp}(r_i) &= 2(B_{\perp}(0) - B_{\perp}(r_i)) \\ &= \frac{8\pi}{3} \left(\frac{\dot{D}_i}{D_i} \right)^2 \int dk P_i(k) \left[1 - 3 \frac{j_1(kr_i)}{kr_i} \right] = \left(\frac{\dot{D}_i}{D_i} \right)^2 S_{\perp}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

となる (参考: Górski (1988) [34])。このように縦・横速度確率分布関数の初期条件は、(5.27)、(5.38)、(5.39) で与えられる。速度場は世界密度場が作り出す重力ポテンシャルによって決まるものであるから、初期の一様等方ランダムなベクトル場である速度場は、同じく一

様等方ランダムな密度場の作り出す重力ポテンシャルによって作られる。つまり、この初期の分散には初期に銀河が重力ポテンシャルに従い線形速度 $\mathbf{v} = \mathbf{g}t$ で集団化しようとしているという情報が含まれているのである。

5.1.3 CDM モデル

今回初期の密度場のパワースペクトルとして採用する CDM モデルについて説明する (参考: Peebles (1980) [1], Peebles(1993) [2])。

まず一般的に、簡単には初期のパワースペクトルは、

$$P_i(k) = BD_i^2 k, \quad (5.40)$$

のようなべき分布であると仮定される。この B という値は観測との比較から決められる。このスペクトルを、特徴的なスケールが存在しないという意味でスケールフリースペクトルあるいは、Harrison-Zel'dovich スペクトルという。CDM モデルは、初期揺らぎの主な構成要素を冷たいダークマターであるとしたものである。この場合宇宙の構造形成の関与する時期にダークマターを構成する粒子が常に非相対論的で、しかも輻射と相互作用しないと考えられる。輻射優勢の時期にホライズン内に入ったダークマターの揺らぎは、物質優勢となるまではエネルギー密度の主要部を占める輻射の揺らぎが成長できないため、それに引きずられて成長できない。この現象のため、小さいスケールの揺らぎの成長がある程度抑えられるので Harrison-Zel'dovich スペクトルを仮定したとして、物質優勢となった後の揺らぎのスペクトルは、小スケール側で若干の変更を受けることになり、

$$P_i(k) = \frac{BD_i^2 k}{\left\{1 + \left[\alpha k + (\beta k)^{3/2} + (\gamma k)^2\right]^\nu\right\}^{2/\nu}}, \quad (5.41)$$

のようになる (参考: Bond et al. (1984) [43])。観測衛星 COBE による背景放射の温度揺らぎ $\frac{\Delta T}{T}$ の角度相関の観測結果より、

$$B = \frac{12\Omega_0^{-1.54} c^4}{5\pi H_0^4} \left(\frac{Q_{rms}}{T_0}\right)^2, \quad (5.42)$$

で、 Q_{rms} は温度揺らぎの四重極子成分の振幅で $\simeq 15.3\mu K$ (Górski et al. 1996 [35]) であ

る。また $\Omega = 1$ 、 $H_0 = 50$ のとき、 $\alpha = 25.6Mpc$ 、 $\beta = 12Mpc$ 、 $\gamma = 6.8Mpc$ 、 $\nu = 1.13$
(Efstathiou et al. 1992 [37]) である。

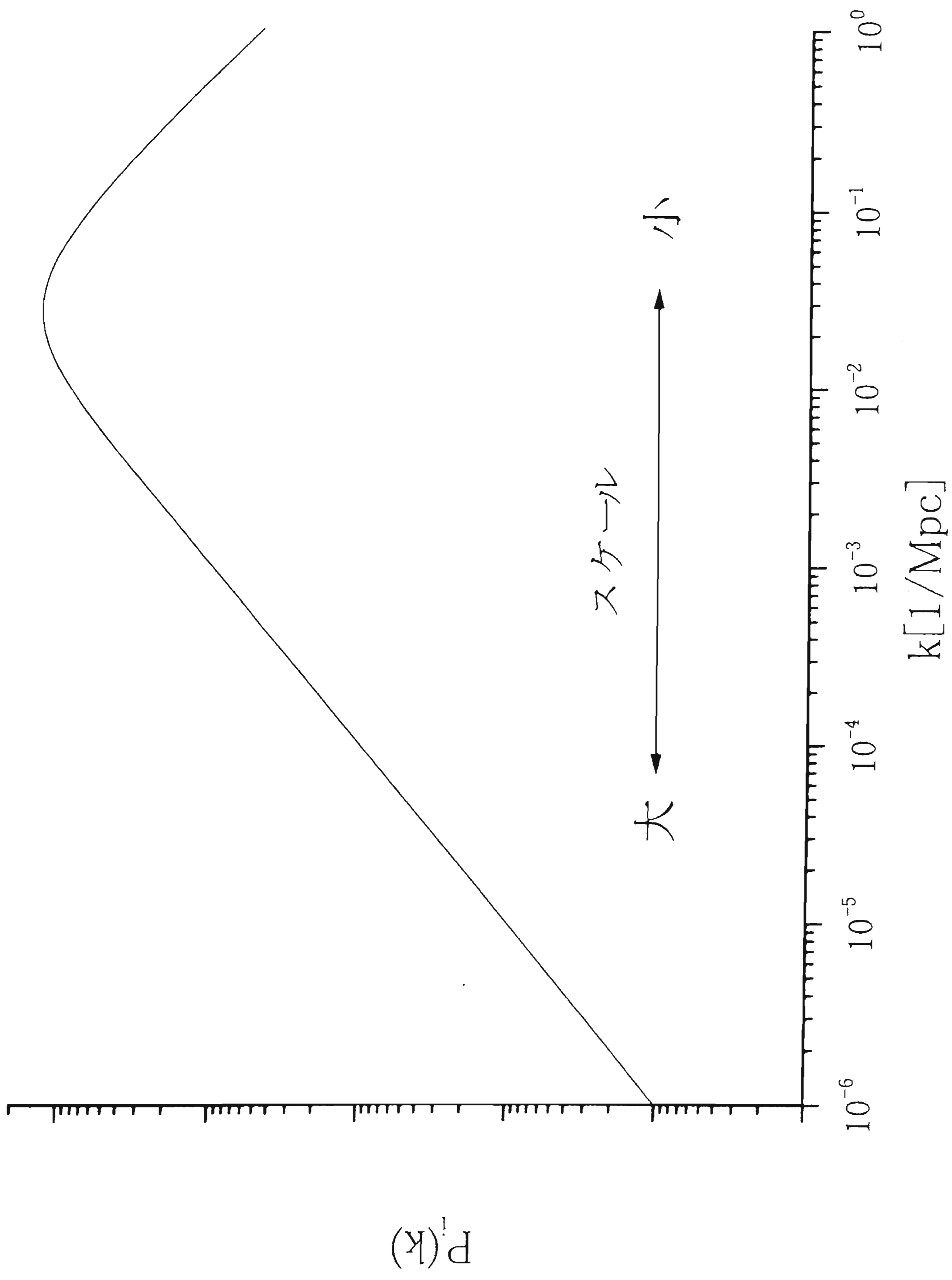


図 5.4: CDM モデル

5.2 ZA の適用範囲

ZA を用いた物体の物理的振る舞いの議論は、近似が正当に成り立っている領域においてのものでなければならない。ここではZA の適用範囲を議論する。

ZA では物体は初期の重力ポテンシャルから決まる方向に直線運動する。そのため、物体が集まると本来ならばお互いの重力によって束縛されて、安定するはずであるが、ZA では一旦集まってもそのままお互い直線運動をしてすり抜けていってしまう。したがって、ZA はその通り抜け (shell crossing) が起きた後は全く正しくない振る舞いをする事になり、近似は破綻するのである。

統計的に shell crossing の影響が無視できなくなるスケールおよび時間の関係を調べ、ZA の適用限界を見る事にする。そのために、 r だけ離れたところまで銀河が移動するタイムスケールを見積もる。ZA の定義(5.21)より、

$$\mathbf{r} = \frac{D}{\dot{D}_i} \mathbf{v}_i, \quad (5.43)$$

r 方向の典型的な初速度は、

$$v_{\parallel i} \approx \sqrt{Q_{\parallel}(r)} = \frac{\dot{D}_i}{D_i} \sqrt{S_{\parallel}(r)}, \quad (5.44)$$

で与えることができる。よって、(5.43) は、

$$r = \frac{D}{D_i} \sqrt{S_{\parallel}(r)}. \quad (5.45)$$

上式から、初期に r だけ離れた銀河ペアが衝突する典型的なタイムスケールは

$$D = \frac{r D_i}{\sqrt{S_{\parallel}(r)}}. \quad (5.46)$$

つまり、 $D \geq \frac{r D_i}{\sqrt{S_{\parallel}(r)}}$ では銀河は互いにすりぬけてしまうのでZA は成立しない。以上の議論から、各スケール r においてZA が適用できるのは、

$$D \ll \frac{r D_i}{\sqrt{S_{\parallel}(r)}}, \quad (5.47)$$

となる時刻 D に限られる。言い換えれば各時刻 D について、ZAが適用できるのは

$$r \gg \frac{D}{D_i} \sqrt{S_{\parallel}(r)}, \quad (5.48)$$

が成り立つスケールである。

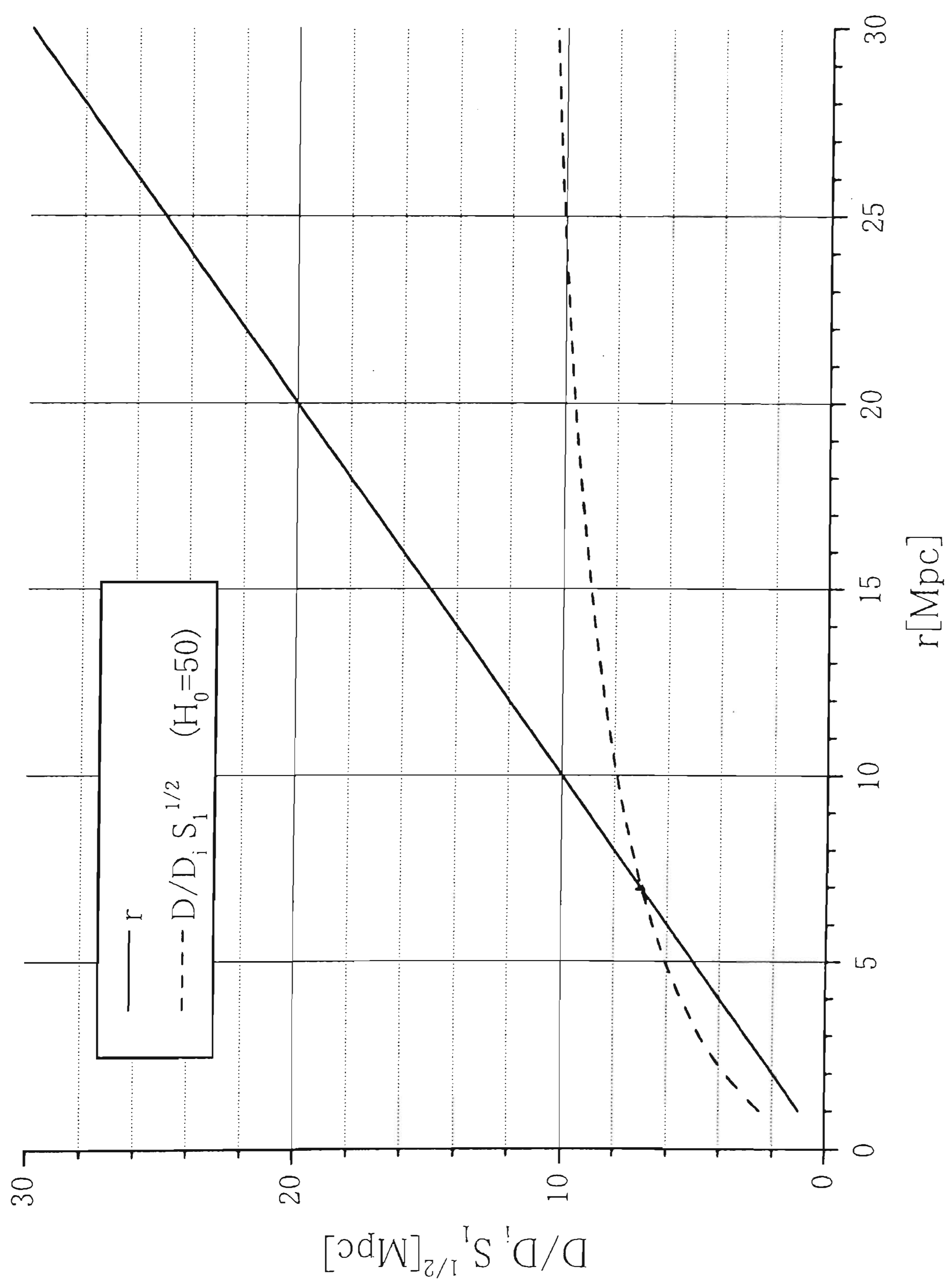


図 5.5: ZA の適用範囲

図 5.13 に、 $D = 1$ 、 $H_0 = 50 \text{ km/s/Mpc}$ のときの (5.48) の右辺および左辺をそれぞれプロットした。この図より r がほぼ 10 Mpc 程度で完全に ZA は破綻してしまうことが分かる。つまり、 r はそれより十分に大きいスケールでなくてはならない。Seto & Yokoyama (1998) [39] は ZA を使って縦速度の確率分布関数を、 $1 \sim 10 \text{ Mpc}$ のときに計算し、Zurek et al. (1994) [38] の N 体数値計算と比べて負の歪み度が再現できないという結果を示していたわけであるが、この議論は ZA の適用範囲を超えたところであったためそのような結果になったと考えられる。

5.3 確率分布関数の解析的説明

この節では、スケールあるいは相対速度が無限大に漸近したときの確率分布関数のふるまいを解析的に調べる。

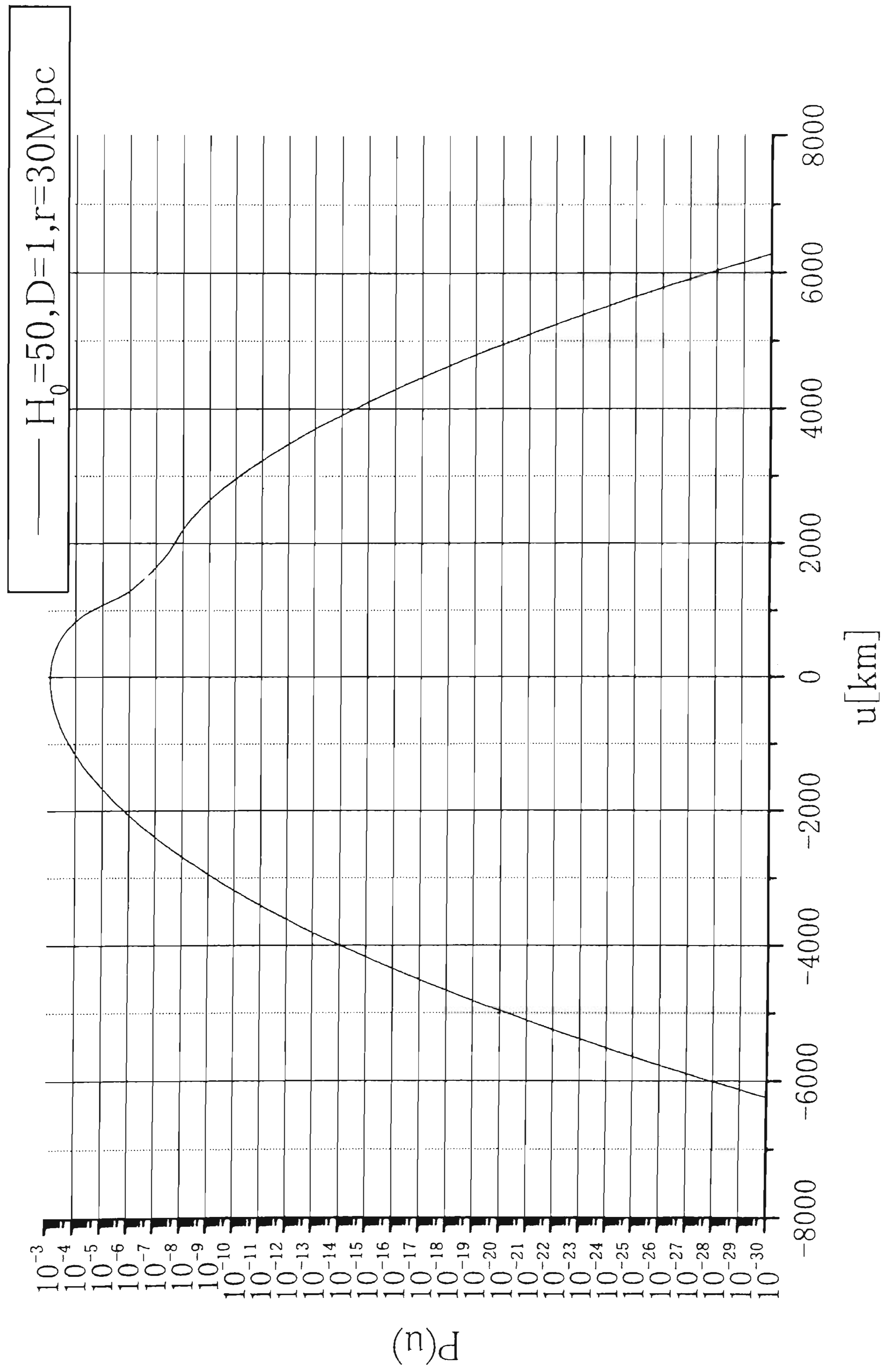


図 5.6: ZA での縦速度確率分布関数

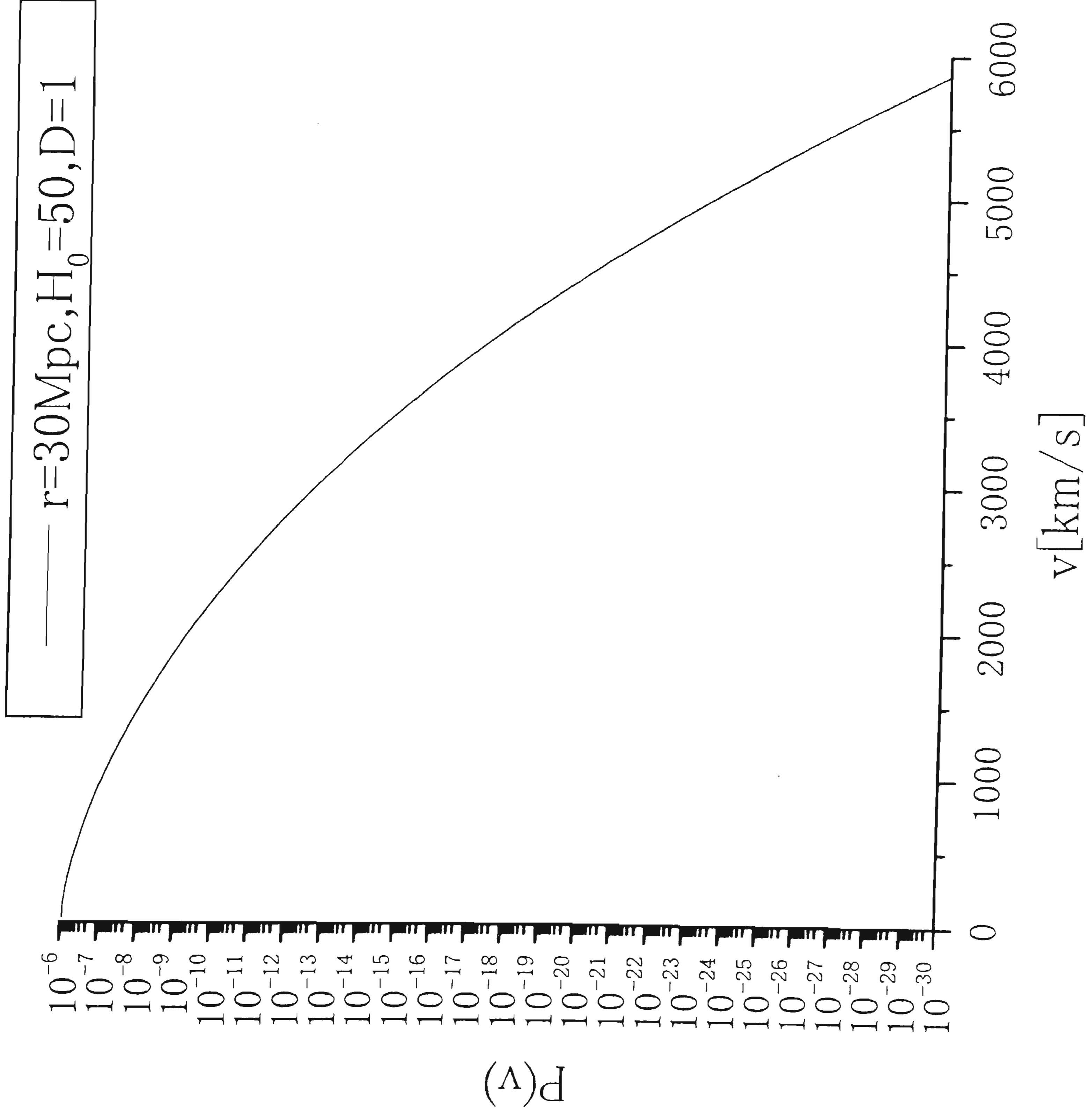


図 5.7: ZA での横速度確率分布関数

5.3.1 $r \rightarrow \infty$ のふるまい

$r \rightarrow \infty$ では、(5.24)、(5.26) は、

$$\begin{cases} r_i = r, \\ v_{\parallel,i} = \frac{\dot{D}_i}{\dot{D}} v_{\parallel}, \\ v_{\perp,i} = \frac{\dot{D}_i}{\dot{D}} v_{\perp}, \end{cases} \quad (5.49)$$

となる。 $r \rightarrow \infty$ で $j_i \rightarrow 0$ なので、初期の縦・横速度の分散(5.38)、(5.39) において二点速度相関は無視でき、一点速度分散のみを考えればよいことになるので

$$Q_{\infty} = Q_{\parallel} = Q_{\perp} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{\dot{D}_i}{\dot{D}} \right)^2 \int dk P_i(k) = \left(\frac{\dot{D}_i}{\dot{D}} \right)^2 S_{\infty}. \quad (5.50)$$

よって初期条件は、

$$\begin{aligned} P(v_{\parallel,i}, v_{\perp,i} | r_i = \infty, t_i) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi Q_{\infty})^3}} \exp \left[-\frac{v_{\parallel,i}^2 + v_{\perp,i}^2}{2Q_{\infty}} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi S_{\infty})^3}} \left(\frac{\dot{D}_i}{\dot{D}} \right)^3 \exp \left[-\frac{v_{\parallel,i}^2 + v_{\perp,i}^2}{2S_{\infty}} \left(\frac{\dot{D}_i}{\dot{D}} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (5.51)$$

となり結局(5.19)、(5.49)、(5.51) より、

$$P(v_{\parallel}, v_{\perp} | r = \infty, t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi S_{\infty})^3}} \left(\frac{\dot{D}_i}{\dot{D}} \right)^3 \exp \left[-\frac{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}{2S_{\infty}} \left(\frac{\dot{D}_i}{\dot{D}} \right)^2 \right] \quad (5.52)$$

これは、分散 $S_{\infty} \left(\frac{\dot{D}_i}{\dot{D}} \right)$ のガウス分布である。充分大きいスケールでは、重力的相互作用からの影響が小さく線形領域になっているという事を正しく反映している。

5.3.2 $|v| \rightarrow \infty$ のふるまい

$|v| \rightarrow \infty$ なので、 $\frac{D}{\dot{D}}|v| \gg r$ のときを考える。このとき、(5.24) より、 $r_i \rightarrow$ 大となるので、初期条件は $r \rightarrow \infty$ のときと同様

$$\begin{aligned}
P(v_{\parallel,i}, v_{\perp,i} | r_i = \infty, t_i) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi Q_\infty)^3}} \exp\left[-\frac{v_{\parallel,i}^2 + v_{\perp,i}^2}{2Q_\infty}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi S_\infty)^3}} \left(\frac{D_i}{\dot{D}_i}\right)^3 \exp\left[-\frac{v_{\parallel,i}^2 + v_{\perp,i}^2}{2S_\infty} \left(\frac{D_i}{\dot{D}_i}\right)^2\right] \quad (5.53)
\end{aligned}$$

である。このあと v_{\parallel} が無限大に発散する場合および v_{\perp} が無限大に発散する場合に分けて議論する。

- $v_{\parallel} \rightarrow \pm\infty$ のとき

(5.24)、(5.26) を $\frac{r}{v_{\parallel}}$ 、 $\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}}$ で展開すると、

$$\begin{aligned}
r_i &= \sqrt{\left(r - \frac{D}{\dot{D}} v_{\parallel}\right)^2 + \left(\frac{D}{\dot{D}} v_{\perp}\right)^2} = \frac{D}{\dot{D}} |v_{\parallel}| \left(1 - 2\frac{\dot{D}}{D} \frac{r}{|v_{\parallel}|} + \frac{v_{\perp}^2}{v_{\parallel}^2} \dots\right)^{1/2} \\
&= \frac{D}{\dot{D}} |v_{\parallel}| \left(1 - \frac{\dot{D}}{D} \frac{r}{|v_{\parallel}|} + \frac{v_{\perp}^2}{2v_{\parallel}^2} \dots\right), \quad (5.54)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{\parallel,i} &= \frac{\dot{D}_i}{\dot{D}} \left(\frac{rv_{\parallel}}{r_i} - \frac{D}{\dot{D}} \frac{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}{r_i}\right) = \frac{\dot{D}_i}{D|v_{\parallel}|} \left(1 + \frac{\dot{D}}{D} \frac{r}{|v_{\parallel}|} - \frac{v_{\perp}^2}{2v_{\parallel}^2} \dots\right) \left[rv_{\parallel} - \frac{D}{\dot{D}} (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)\right] \\
&= -\frac{\dot{D}_i}{\dot{D}} |v_{\parallel}| \left(1 + \frac{v_{\perp}^2}{2v_{\parallel}^2} \dots\right), \quad (5.55)
\end{aligned}$$

$$v_{\perp,i} = \frac{\dot{D}_i}{\dot{D}} \frac{rv_{\perp}}{r_i} \frac{\dot{D}_i}{D} \frac{rv_{\perp}}{|v_{\parallel}|} \left(1 + \frac{\dot{D}}{D} \frac{r}{|v_{\parallel}|} - \frac{v_{\perp}^2}{2v_{\parallel}^2} \dots\right). \quad (5.56)$$

よって leading order でまとめると、

$$P(v_{\parallel}, v_{\perp} | r = \infty, t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi S_\infty)^3}} \left(\frac{D_i}{\dot{D}_i}\right)^3 \exp\left[-\frac{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}{2S_\infty} \left(\frac{D_i}{\dot{D}_i}\right)^2\right], \quad (5.57)$$

となり、このときガウス分布になることがわかる。

- $v_{\perp} \rightarrow \infty$ のとき

(5.24)、(5.26) を $\frac{r}{v_{\perp}}$ 、 $\frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}}$ で展開すると、

$$\begin{aligned}
r_i &= \frac{D}{\dot{D}} v_{\perp} \left(1 - 2 \frac{\dot{D}}{D} \frac{r v_{\parallel}}{v_{\perp}^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{v_{\perp}^2} \dots \right)^{1/2} \\
&= \frac{D}{\dot{D}} v_{\perp} \left(1 - \frac{\dot{D}}{D} \frac{r v_{\parallel}}{v_{\perp}^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{2v_{\perp}^2} \dots \right), \tag{5.58}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{\parallel,i} &= \frac{\dot{D}_i}{D v_{\perp}} \left(1 + \frac{\dot{D}}{D} \frac{r v_{\parallel}}{v_{\perp}^2} - \frac{v_{\parallel}^2}{2v_{\perp}^2} \dots \right) \left[r v_{\parallel} - \frac{D}{\dot{D}} (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2) \right] \\
&= -\frac{\dot{D}_i}{\dot{D}} v_{\perp} \left(1 + \frac{v_{\parallel}^2}{2v_{\perp}^2} \dots \right), \tag{5.59}
\end{aligned}$$

$$v_{\perp,i} = \frac{\dot{D}_i}{D} r \left(1 + \frac{\dot{D}}{D} \frac{r v_{\parallel}}{v_{\perp}^2} - \frac{v_{\parallel}^2}{2v_{\perp}^2} \dots \right). \tag{5.60}$$

よって leading order でまとめると、 $v_{\parallel} \rightarrow \pm\infty$ のときと同じく、

$$P(v_{\parallel}, v_{\perp} | r = \infty, t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi S_{\infty})^3}} \left(\frac{D_i}{\dot{D}} \right)^3 \exp \left[-\frac{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}{2S_{\infty}} \left(\frac{D_i}{\dot{D}} \right)^2 \right], \tag{5.61}$$

となり、ガウス分布になることがわかる。

5.3.3 縦速度確率分布関数の歪み度の説明

これまでになされてきた N 体数値計算の結果でも、負の歪み度が示されている。ここでは負の歪み度がどのような物理のメカニズムで発生するのかということに対して解析的に議論したい。宇宙の構造形成の過渡期には重力的落ち込み (infall) の効果が大きい。そのため縦速度確率分布関数は負に歪むであろうと思われる。よってもし ZA が正当に重力的落ち込みを取り入れている近似であれば、ZA を使って単純に、負の歪みが生じることを示し、解析的、定性的な議論をすることができるはずである。

初期には、各銀河はその時の密度揺らぎの空間分布から決まる重力ポテンシャルの勾配に従って集団化しようとしているわけであるが、ZA では速度ベクトルは、初期の線形な密度揺らぎの空間分布が作り出す重力ポテンシャルの勾配に比例したものになっているのである。従って、ZA ではその情報を保持したまま時間発展するので、ZA が近似として成り立つ

ている範囲においては銀河は集団化しようとして動きつづけ、縦速度の確率分布は負に歪むと考えられるのである。

この節では簡単な議論より負の歪みが生じるのは $|v_{\parallel}| < \frac{\dot{D}}{D}r$ の領域であることを示す。
($|v_{\parallel}| \cong \frac{\dot{D}}{D}r$ となるのは、 $D = 1$ 、 $H_0 = 50 \text{ km/s/Mpc}$ 、 30 Mpc で 1500 km/s 程度である。)

$$\begin{aligned} r_i &= \sqrt{\left(r - \frac{D}{\dot{D}}v_{\parallel}\right)^2 + \left(\frac{D}{\dot{D}}v_{\perp}\right)^2} \simeq \left[r^2 - 2r\frac{D}{\dot{D}}v_{\parallel} + \left(\frac{D}{\dot{D}}\right)^2(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)\right]^{1/2} \\ &\simeq r\left(1 - \frac{D}{\dot{D}}\frac{v_{\parallel}}{r} + \frac{1}{2r^2}\left(\frac{D}{\dot{D}}\right)^2(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)\dots\right), \end{aligned} \quad (5.62)$$

$$v_{\parallel,i} \simeq \frac{\dot{D}_i}{\dot{D}}\left(v_{\parallel} - \frac{D}{\dot{D}}\frac{v_{\perp}^2}{r}\dots\right), \quad (5.63)$$

$$v_{\perp,i} \simeq \frac{\dot{D}_i}{\dot{D}}\left(v_{\perp} + \frac{D}{\dot{D}}\frac{v_{\parallel}v_{\perp}}{r}\dots\right), \quad (5.64)$$

と展開する。 v_{\perp} については、 $v_{\perp} \simeq 0$ となる銀河が大多数を占めている事を考慮して、

$$r_i = \sqrt{\left(r - \frac{D}{\dot{D}}v_{\parallel}\right)^2 + \left(\frac{D}{\dot{D}}v_{\perp}\right)^2} \simeq \left[r^2 - 2r\frac{D}{\dot{D}}v_{\parallel}\right]^{1/2} \simeq r\left(1 - \frac{D}{\dot{D}}\frac{v_{\parallel}}{r}\right), \quad (5.65)$$

$$v_{\parallel,i} = \frac{\dot{D}_i}{\dot{D}}v_{\parallel}, \quad (5.66)$$

$$v_{\perp,i} = \frac{\dot{D}_i}{\dot{D}}v_{\perp}, \quad (5.67)$$

(5.65) より、 $|v_{\parallel}| = V$ とおくと、

$$r_i(V) < r < r_i(-V), \quad (5.68)$$

である事がわかる。これはZAで見える事の出来る最も単純な重力的ふるまいである。

一方(5.63)、(5.64)より、

$$|v_{\parallel,i}(v_{\parallel} = -V)| = |v_{\parallel,i}(v_{\parallel} = V)|. \quad (5.69)$$

初期条件はガウス分布であるが、初期分散 Q_{\parallel} (式 5.38) は $r < 100 \text{ Mpc}$ 程度では r_i が大きいほど大きくなっている。(図 5.8を見よ。)

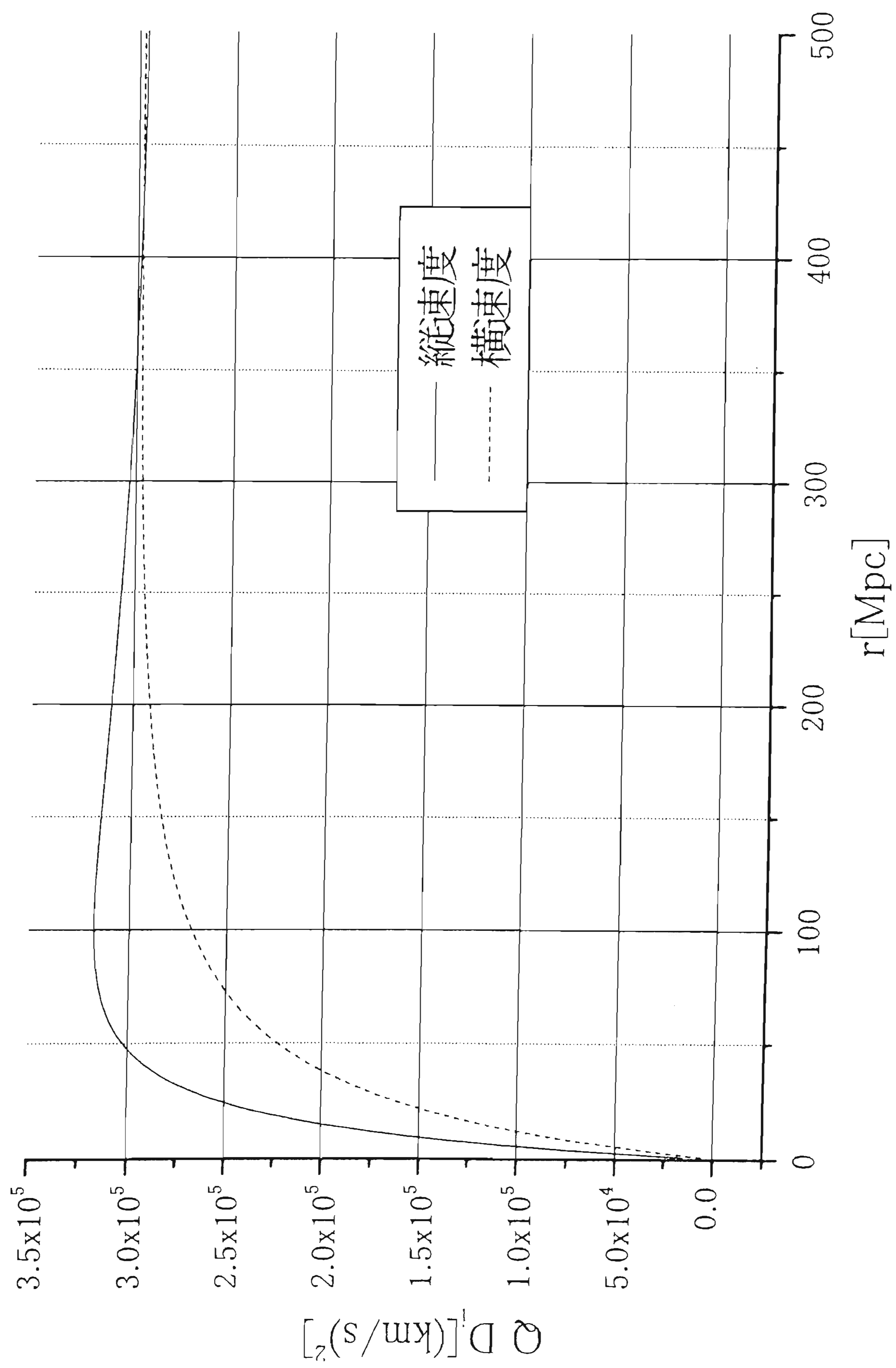


図 5.8: 初期の速度分散の r -依存性

よって、

$$r = \frac{1}{2} (r_i(V) + r_i(-V)), \quad (5.70)$$

とした場合に、

$$|v_{\parallel,i}(v_{\parallel} = \pm V)| > \sqrt{Q_{\parallel}(r)} = \frac{\dot{D}_i}{D_i} \sqrt{S_{\parallel}(r)}, \quad (5.71)$$

を満たしていれば、それぞれが従う二つのガウス分布の交点の左右の外側での議論になるので、図 5.9 からわかるように

$$P(-V) > P(V), \quad (5.72)$$

という関係が成り立ち、この領域では確率分布関数は負に歪んでいることが説明できる。

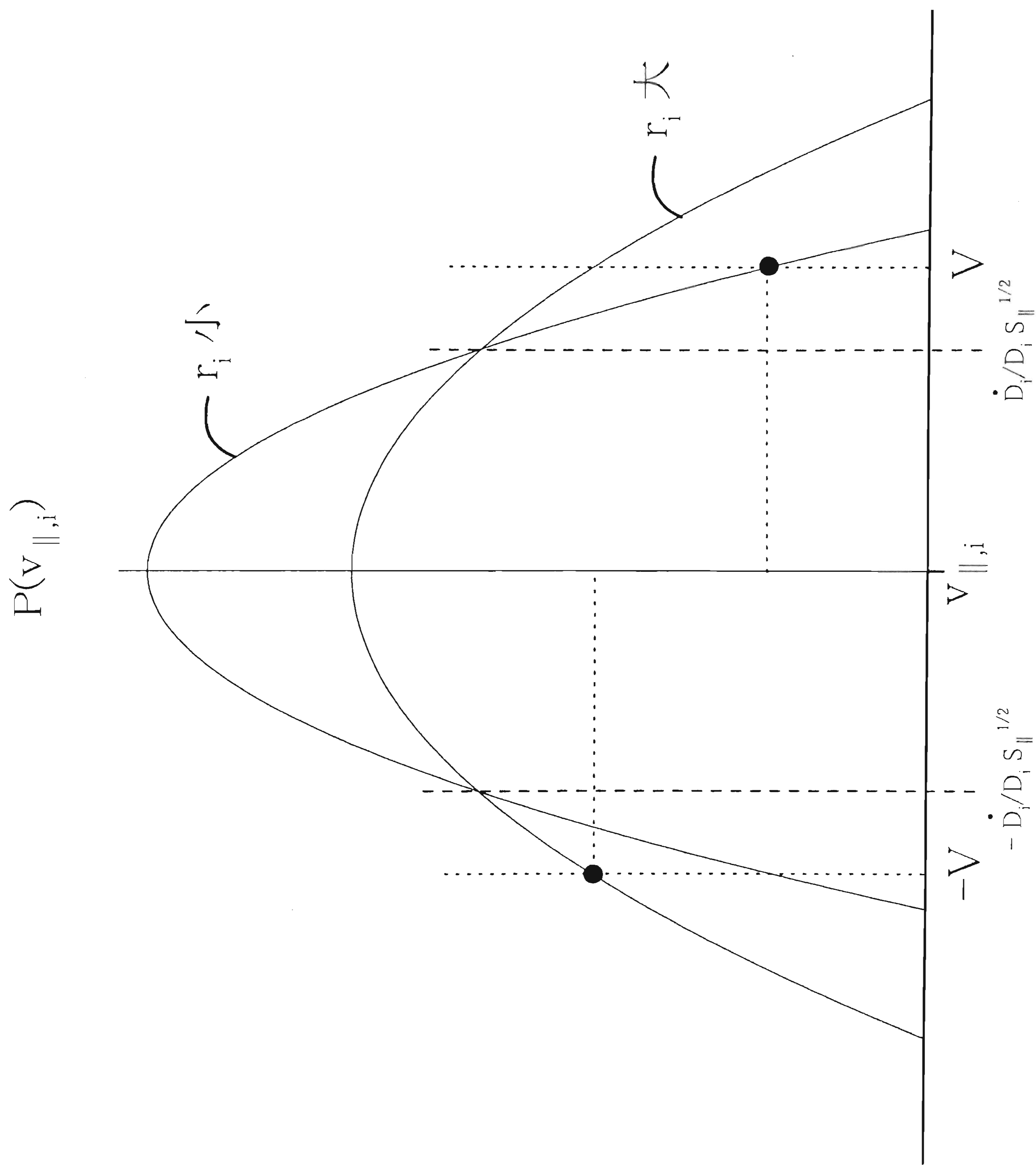


図 5.9: 二つのガウス分布

ただし、今 $|v_{\parallel}| < \frac{\dot{D}}{D}r$ という条件のもと議論しているの、これが満たされる領域が存在するためには当然 $\frac{\dot{D}}{D_i}\sqrt{S_{\parallel}(r)} < \frac{\dot{D}}{D}r$ でなければならない。これは実は ZA が成り立つ条件である、(5.47) と同じ物である。

$|v_{\parallel}| < \frac{\dot{D}}{D_i}\sqrt{S_{\parallel}(r)}$ のときは、上の議論では正の歪み度が発生することになるわけであるが、そのように $|v_{\parallel}|$ が小さいところでは、今度は $O(|v_{\parallel}|) \simeq O(\frac{1}{r}\frac{\dot{D}}{D}|v_{\perp}|^2)$ である領域が効いてきてしまう。よって上の議論が成り立つとは限らず、 $|v_{\parallel}|$ 、 $|v_{\perp}|$ 、 r の値に微妙に依っており、その寄与も定量的に小さいといえる。つまりこの領域においてはここでの議論で歪み度の正負や大きさを示すことはできない。

また、 $v_{\parallel} > \frac{\dot{D}}{D}r$ の領域では shell crossing 後にお互いにすり抜けてしまった銀河が多く含まれているはずであり、この領域の確率は実際より過大に評価されているということである。この領域では ZA は破綻していると考えなければならないので、ZA を用いた議論は不可能である。

つまり、負の歪み度の発生に主に寄与しているのは、

$$\frac{\dot{D}}{D_i}\sqrt{S_{\parallel}(r)} < |v_{\parallel}| < \frac{\dot{D}}{D}r, \quad (5.73)$$

という領域であるといえる。そのメカニズムは上述のように、一様ベクトル場の物理と線形理論から求まる初期の分散の r 依存性と、直線運動という近似である ZA で充分追うことが出来る単純な重力的振る舞いという二つのことで定性的に説明できる。

初期の縦・横速度分散の r 依存性の一般性について議論しておく。初期の縦・横速度分散は、一様ベクトル場の物理によって導出される、

$$\left[1 - 3j_0(kr_i) + 6\frac{j_1(kr_i)}{kr_i}\right] = A_{\parallel}, \quad (5.74)$$

$$\left[1 - 3\frac{j_1(kr_i)}{kr_i}\right] = A_{\perp}, \quad (5.75)$$

の形に大きく依存している。図 5.10 から分かるように $r_i \rightarrow 0$ のとき、 A_{\parallel} 、 A_{\perp} はゼロになっており、 $r_i \rightarrow \infty$ のときは A_{\parallel} 、 A_{\perp} は 1 に収束している。従ってパワースペクトルとして、観測と矛盾しない範囲で仮定しうるどのような形のものを採用しても、式 (5.38)、(5.39) は $r_i \rightarrow 0$ ではゼロとなり、 r_i が大きくなるにつれある有限の値をとることになるはずである。

従って負の歪み度発生メカニズムを説明する振る舞いである、初期の縦・横速度分散のスケール依存性は、観測結果が許す範囲での初期のパワースペクトルのモデルの選び方に依らず、一般的に成り立っている性質であるといえる。この A_{\parallel} 、 A_{\perp} の振る舞いにはこれまでの章で述べたように一様ランダムな密度分布によって作られた重力ポテンシャルの勾配に従って銀河が集団化しようとしている情報が含まれているからである。

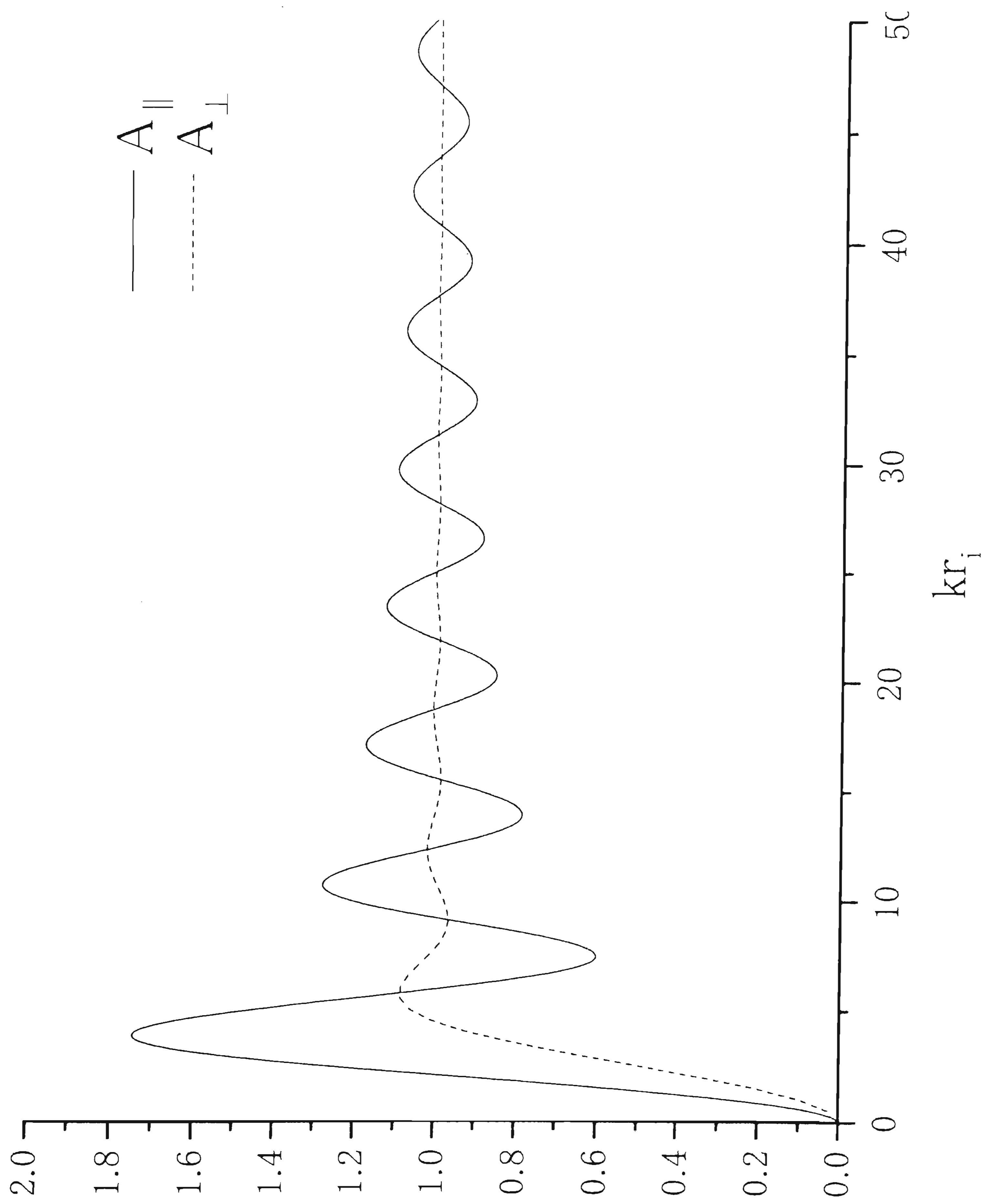


図 5.10: Bessel の形

5.4 ZAでの確率分布関数の時間発展方程式

ZAでの確率分布関数の時間発展はすでに(5.19)で得られているわけだが、ここではその振る舞いを理解する助けにするために確率分布関数が従う時間発展方程式を求めてみる。

$P(v'_{\parallel}, v'_{\perp} | r', t + dt)$ を t のまわりで展開することにより、

$$\begin{aligned} & P(v'_{\parallel}, v'_{\perp} | r', t + dt) \delta v'_{\parallel} 2\pi v'_{\perp} \delta v'_{\perp} 4\pi r'^2 \delta r' \\ &= \left[P(v_{\parallel}, v_{\perp} | r, t) + \frac{\partial P}{\partial v_{\parallel}} \left(\frac{\ddot{D}}{\dot{D}} v_{\parallel} + \frac{v_{\perp}^2}{r} \right) dt + \frac{\partial P}{\partial v_{\perp}} \left(\frac{\ddot{D}}{\dot{D}} v_{\perp} - \frac{v_{\perp} v_{\parallel}}{r} \right) dt \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial P}{\partial r} v_{\parallel} dt + \frac{\partial P}{\partial t} dt \right] \left(1 + 3 \frac{\ddot{D}}{\dot{D}} dt \right) \delta v_{\parallel} 2\pi v_{\perp} \delta v_{\perp} 4\pi r^2 \delta r, \end{aligned} \quad (5.76)$$

となる。ここで(5.17)を用いた。(5.7)と(5.76)を比べることによって、ZAでの $P(v_{\parallel}, v_{\perp} | r, t)$ の従う微分方程式は、

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\ddot{D}}{\dot{D}} \left(v_{\parallel} \frac{\partial P}{\partial v_{\parallel}} + v_{\perp} \frac{\partial P}{\partial v_{\perp}} + 3P \right) - \frac{v_{\perp}}{r} \left(v_{\perp} \frac{\partial P}{\partial v_{\parallel}} - v_{\parallel} \frac{\partial P}{\partial v_{\perp}} \right) - v_{\parallel} \frac{\partial P}{\partial r}, \quad (5.77)$$

となることが分かる。この式は無衝突ボルツマン方程式に相当する式である。ZAでは個々の銀河に対する他の銀河たちの重力的寄与を平均場として取り入れているからである。一項目は銀河の加速、二項目は座標系の回転、三項目は銀河の移動をあらわしている。ただし、一般化座標とそれに対する一般化運動量となるように座標系をとっていない。このため、微小体積 $\delta v_{\parallel} 2\pi v_{\perp} \delta v_{\perp} 4\pi r^2 \delta r$ が時間について一定値をとらない。この効果が(5.77)式の一項目の括弧内の第3項として表われている。(5.17)式を見よ)

この微分方程式を見ることでいろいろな統計的性質の発展を解析的に議論することができる。以下、(5.77)式を各変数で積分し、時間微分を求めることでそれぞれ $P(v_{\parallel})$ 、 $P(v_{\perp})$ 、 $\xi(r)$ の時間発展を見てみることにする。 $P(v_{\parallel})$ 、 $\xi(r)$ についてはこれまでに、各時間後との比較をすることで時間発展の議論をそれぞれSeto & Yokoyama (1998) [39]、Porciani (1997) [40]によってされているが、ここでは時間微分そのものの振る舞いを調べることでさらにこれらの時間変化の特性を直接的に議論する。

- 縦速度確率分布関数の時間発展

(5.77)を $2\pi v_{\perp} dv_{\perp}$ で積分して、縦速度の確率分布関数の時間発展を記述する方程式を

求めると、

$$\frac{\partial P(v_{\parallel})}{\partial t} = -\frac{\ddot{D}}{\dot{D}} \left(v_{\parallel} \frac{\partial P(v_{\parallel})}{\partial v_{\parallel}} + P(v_{\parallel}) \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \left(\langle v_{\perp}^2 \rangle_{v_{\parallel}} P(v_{\parallel}) \right) - \frac{v_{\parallel}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 P(v_{\parallel}) \right) \quad (5.78)$$

となる。

$D = 1$ (現在)、 $H_0 = 50 \text{ km/s/Mpc}$ でのこの縦速度確率分布関数の時間発展をプロットした。

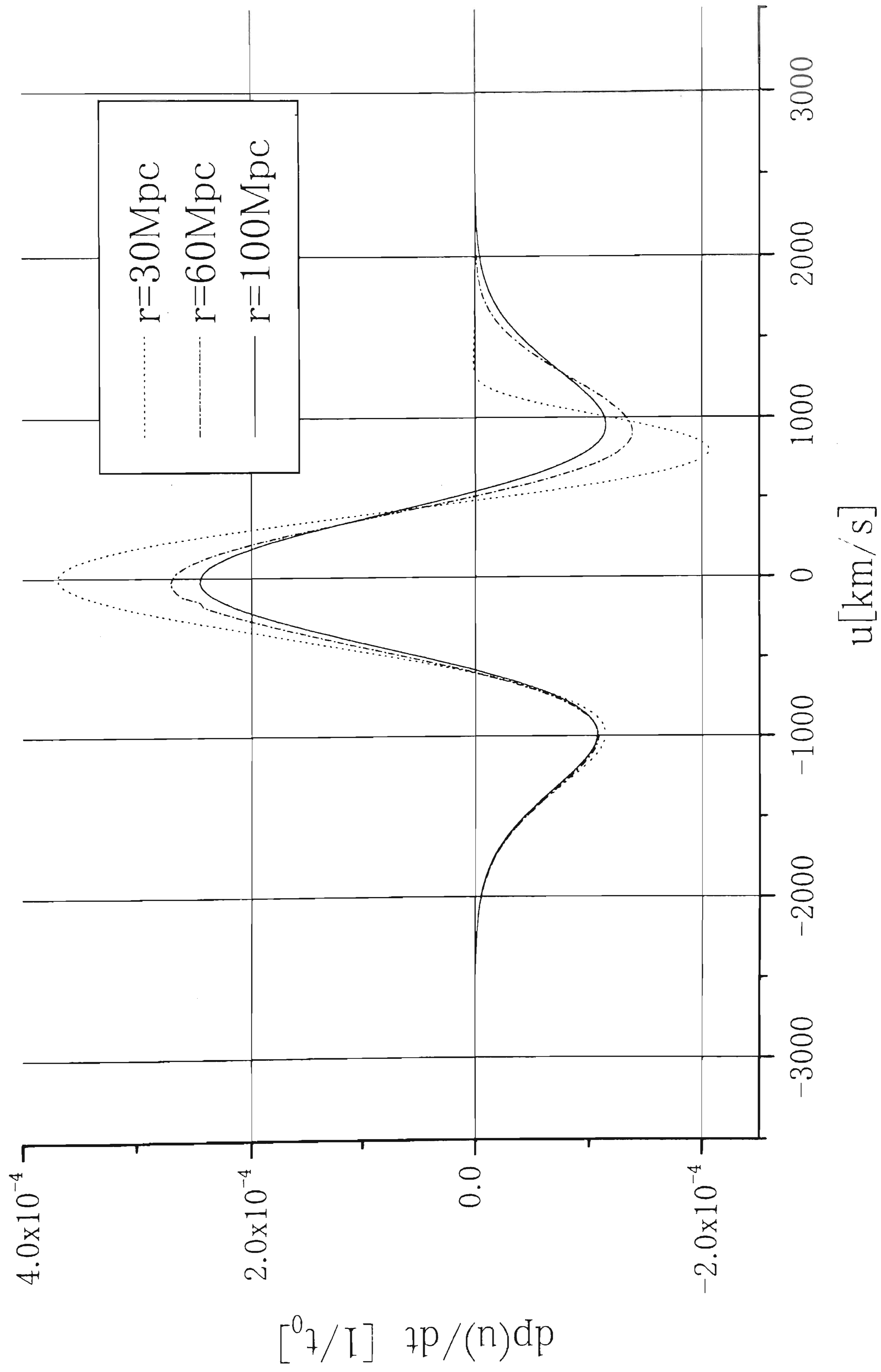


図 5.11: ZA での縦速度確率分布関数の時間変化

この図 5.11では中心（縦速度 u がゼロ）のあたりに $\frac{\partial P(v_{\parallel})}{\partial t}$ のピークがあり、左右で一度負の値に落ち込み、そのままゼロに収束している。この振る舞いから、確率分布関数 $P(v_{\parallel})$ は中心のピークがどんどん高くなる一方テイルは低くなり、時間発展によって尖り度が増していくことがわかる。さらに、図の $\frac{\partial P(v_{\parallel})}{\partial t}$ の左右の落ち込みの深さには差があることが分かるが、この差が $P(v_{\parallel})$ の左右の歪み度発生の起源になっていると言える。前章で歪み度発生のメカニズムの解析的な議論をしたわけであるが、この図での歪み度発生に寄与している左右の落ち込みのある速度領域は、前章での議論と全く矛盾しない。また歪み度発生に寄与している速度領域のスケール r 依存性は、負の側ではあまり見られないが、正の側では顕著であり、100Mpc ではほぼ左右対称で歪み度は殆ど発生していないが、より小さいスケールでは非対称性が強くこれらのスケールにおいては単位時間あたりの歪み度発生の度合いが大きいことを示している。また図より、全てのスケールにおいて、左右同じ速度領域で $\frac{\partial P(v_{\parallel})}{\partial t}$ はゼロに収束していることがわかる。このことより ZA ではスケール r に依らず、そのような大きい速度領域においては、 $P(v_{\parallel})$ は時間発展をせずガウス分布のテイルを保ったままであることが言える。

- 横速度確率分布関数の時間発展

横速度確率分布関数の時間発展を記述する方程式を求める。(5.77) を dv_{\parallel} で積分して、

$$\frac{\partial P(v_{\perp})}{\partial t} = -\frac{\ddot{D}}{\dot{D}} \left(v_{\perp} \frac{\partial P(v_{\perp})}{\partial v_{\perp}} + 2P(v_{\perp}) \right) + \frac{(v_{\perp})}{r} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \left(\langle v_{\parallel} \rangle_{v_{\perp}} P(v_{\perp}) \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\langle v_{\parallel} \rangle_{v_{\perp}} P(v_{\parallel}) \right) \quad (5.79)$$

となる。

$D = 1$ （現在）、 $H_0 = 50 \text{ km/s/Mpc}$ でのこの横速度確率分布関数の時間発展をプロットした。

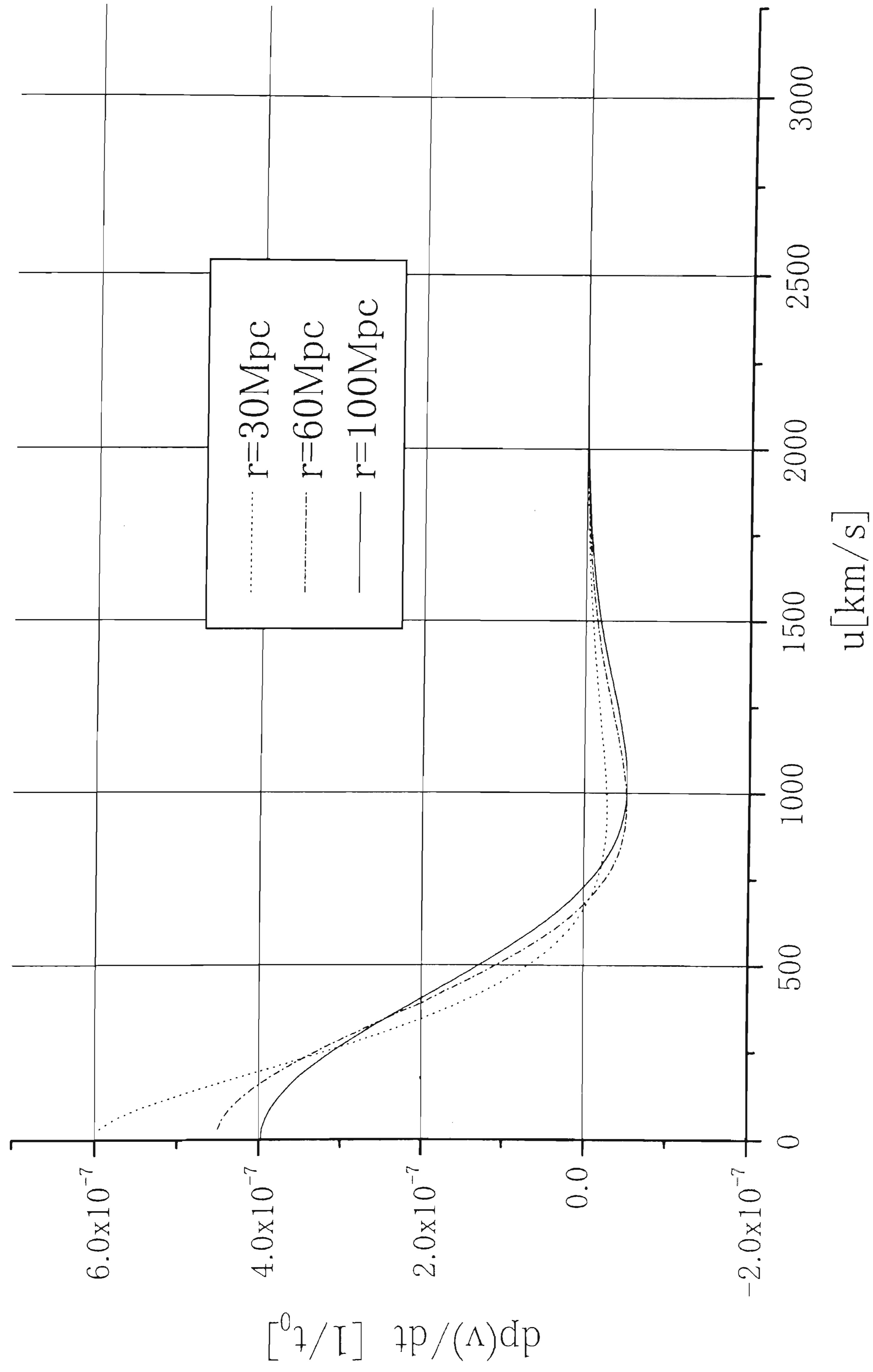


図 5.12: ZA での横速度確率分布関数時間変化

この図 5.12でも横速度 v がゼロで $\frac{\partial P(v_{\perp})}{\partial t}$ のピークがあり、その後一度負の値に落ち込み、そのままゼロに収束している。この振る舞いから、確率分布関数 $P(v_{\perp})$ も $P(v_{\parallel})$ 同様ピークがどんどん高くなる一方テイルは低くなり、時間発展によって尖り度が増していくことがわかる。また、全てのスケールにおいて、ほぼ同じ速度領域で $\frac{\partial P(v_{\perp})}{\partial t}$ はゼロに収束している。このことよりZAではスケール r に依らず、 $P(v_{\parallel})$ 同様 $P(v_{\perp})$ も大きい速度領域において、時間発展をせずガウス分布のテイルを保ったままであることが言える。

- 二点相関関数の時間発展

(5.77)を $dv_{\parallel}2\pi v_{\perp}dv_{\perp}$ で積分すると、二点相関関数の時間発展を記述する方程式が求まる。

$$\frac{\partial}{\partial t}(1 + \xi(r)) = \frac{\partial \xi(r)}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 (1 + \xi(r)) \langle v_{\parallel} \rangle_r, \quad (5.80)$$

となり、この式は粒子数保存の式（連続方程式）であることが分かる。 $D=1$ （現在）、 $H_0=50\text{km/s/Mpc}$ のときにこの二点相関関数の時間微分をプロットした。

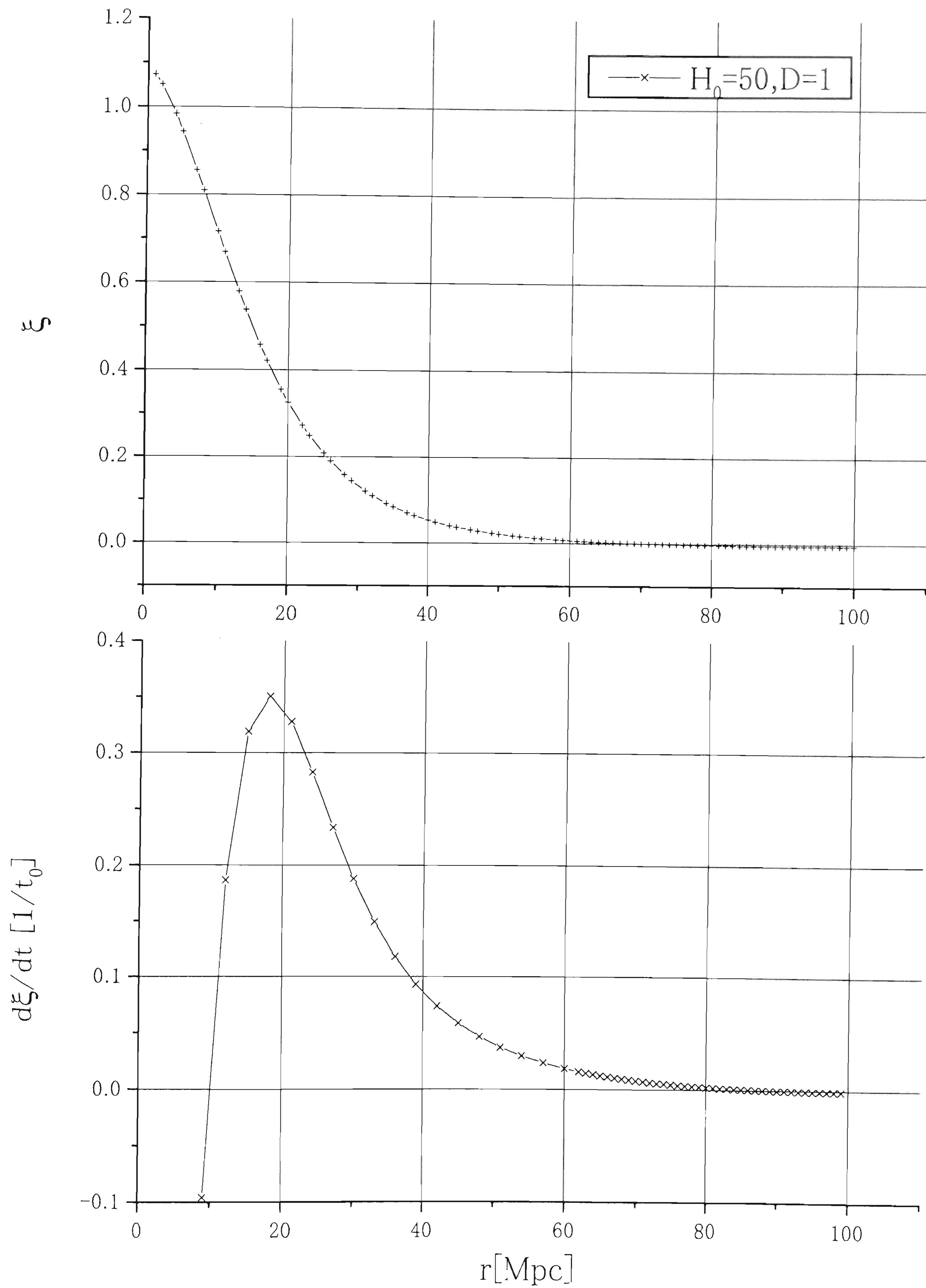


図 5.13: ZA での二点相関関数の時間変化

図 5.13より、小スケールにおいて二点相関関数の成長が止まってしまっていることが見て取れる。前にも触れたようにZAでは物体は直線運動してしまう。実際の構造形成においては、銀河同士はshell crossing後は重力によって減速しバウンドされるはずなのであるが、ZAでは重力によって銀河同士が落ち込んでいきshell crossingが起きた後、そのまますり抜けていってしまうことになり、完全に近似が破綻してしまうのである。小さいスケールほど早くshell crossingしてしまうのでその効果が無視できなくなってしまうと考えられる。また一つのスケールに着目した場合でも時間が経つと、同様にshell crossingの効果が大きくなってしまいZAは破綻する。図においては、約20Mpcあたりのスケールで二点相関関数の時間的成長が止まってしまっている。(5.48)式で求めたZAの適用限界の議論と、この図の振る舞いを照らし合わせることにより、この20Mpcあたりが、ZAをもちいて安全に議論できる限界であると推測できる。また、(5.48)式の両辺が等しくなるスケールは、図ではほぼ、二点相関関数の時間的成長がゼロになったあたりである。

5.5 縦速度確率分布関数のN体数値計算との比較

図 5.14に、縦速度確率分布関数に対する今回の数値計算と、N体数値計算の結果を比べる。

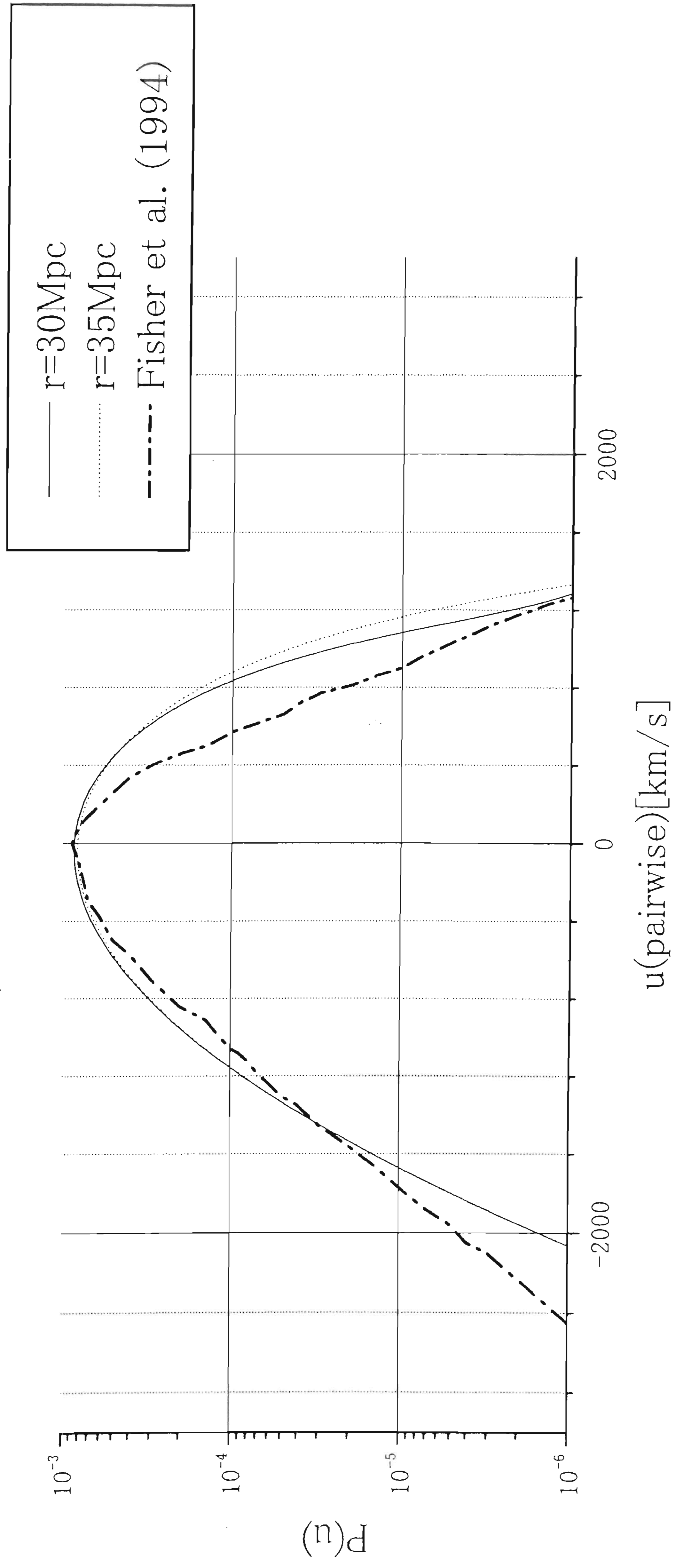


図 5.14: Fisher et al. との比較

Fisher et al. (1994) [36] によって EDS 宇宙で、 $H_0 = 50\text{km/s/Mpc}$ の時 CDM モデルで N 体数値計算がさまざまな ξ の値に対してされている。このうち、 $\xi = 0.1$ のときに彼らの結果と、同じ条件下での ZA での計算結果を図 5.14 で比較した。図 5.13 より、 $D = 1$ (現在) のとき、EDS 宇宙で $H_0 = 50$ とした場合の $\xi = 0.1$ となるスケールは、ZA では $r = 30 \sim 35\text{Mpc}$ 程度であるが、このスケールは ZA の適用範囲内と考えていいであろう。さきほど負の歪み度が発生することを定性的に示したわけだが、この図 5.14 からわかるように、ZA で負の歪み度はよく再現できているという事が言える。ただ、N 体数値計算の結果では左右のテイルがほぼ指数関数に近い形でひいているのに対して、ZA での計算結果はどちらかといえばガウス分布に近い形のテイルになっているように見える。ZA では残念ながらこのあたりの振る舞いを充分再現し、説明することはできなかったということになる。このテイルの振る舞いは、さらに非線形性の情報を多く取り入れられる近似法や、モデルなどを使うことで追えることが期待される。

5.6 結論

この章ではZAを使って縦速度、横速度の結合確率分布関数の時間発展を解析的に求めた。この時間発展の解析解に、初期条件を与えて、各変数に対して数値積分を行う事などによって、ZAでの縦速度、横速度の確率分布関数や、さらには二点相関関数の、様々な振る舞いを調べる事が出来るようになった。また、ZAでの結合確率分布関数が満たす時間発展方程式も導いた。この方程式によって各確率分布関数の時間発展の背景にある物理をより理解することができるようになった。

次に、ZAの適用範囲を議論した。初期に典型的な相対速度を持ったある距離だけ離れた銀河同士が衝突するタイムスケールを求め、それ以降がshell crossingの効果が完全に無視できなくなる領域であると考えた事によって、時間と距離に対するZAの適用範囲を見積もった。その結果と二点相関関数の時間発展を求めた結果との比較考察により、 $D=1$ (現在)、 $H_0=50\text{km/s/Mpc}$ のときには、20Mpc程度以上がZAの適用範囲であると結論した。

さらに、縦速度確率分布関数の負の歪み度が発生する定性的なメカニズムを議論した。構造形成過渡期の銀河の集団化に伴う負の歪み度が発生する核となるメカニズムをZAの単純さから非常に明解な解析的説明をすることができた。定性的に負の歪み度発生に最も大きく寄与するメカニズムは、初期の速度分散の r 依存性およびZAで充分再現できる極めて単純な銀河の運動で説明できる事が結論づけられた。前者の初期の速度分散の r 依存性には、初期の各銀河が重力ポテンシャルの勾配に従って集団化しようという情報が含まれているのである。

以上の事をふまえて次に、Fisher et al. (1994) [36]のN体数値計算の結果と同じ条件下で今回ZAで計算した結果とを比較した。ZAが成立する時間、スケールにおいては、負の歪み度がZAで定性的に、よく再現できることを示す事ができた。ところが、N体数値計算ではテイルがほぼ指数関数に近い形であるが、この振る舞いはZAでは再現する事が出来なかった。今後、さらに次数を上げたPZA、PPZAあるいはそれらをもとに私が独自に開発した新しい優れた近似法であるPadéPPZAなどを適用していくことで、このような指数関数的な振る舞いを再現し、背景にある物理をより解析的に議論し、理解していこうと思っ

いる。