付録

A　線形理論

揺らぎの大きさが非常に小さいとき（$|\delta| \ll 1$ のとき）は、線形近似が成り立つ。線形近似がなりたつような時は、どのような形の揺らぎにたいしても解析解が存在する。Einstein-de Sitter 宇宙 (EDS) では、(1.10)（1.11）より、δの２次以降の項をおとして、

$$\dot{\delta} + \frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{A.1}$$

$$(a\mathbf{u})^{\cdot} = -\nabla_{\mathbf{x}}\Phi, \tag{A.2}$$

これら、２式より、

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} - 4\pi G\bar{\rho}\delta = 0, \tag{A.3}$$

EDS では、$\Omega = 1$、$a \propto t^{(2/3)}$なので、

$$6\pi G\bar{\rho}t^2 = 1, \tag{A.4}$$

より、これをつかって上の微分方程式を解いて、

$$\delta = \delta_0 \propto D_+(t) \propto t^{2/3} \propto a. \tag{A.5}$$

よって、線形の密度ゆらぎは、スケールファクターに比例して成長する。

B　二次の摂動理論

ここでは、EDSの中で二次の摂動理論をレビューする。[1]

（1.10）（1.11）をもう一度書くと、

$$\begin{aligned}\dot{\delta} + \frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{x}} \cdot [(1+\delta)\,\mathbf{u}] &= 0, \\ \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{a}(\mathbf{u}\cdot\nabla_{\mathbf{x}})\,\mathbf{u} + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{u} &= -\frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{x}}\Phi.\end{aligned}$$

上式のうち、一番目の式に$\mathbf{u}\bar{\rho}a^3$をかけたものと、二番目の式にρをかけたものを足し合わせると、

$$(\rho u^{\alpha})^{\cdot} + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(\rho u^{\alpha}u^{\beta}\right)\mathbf{u} + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho u^{\alpha} = -\frac{1}{a}\rho\nabla_{\alpha}\Phi. \tag{B.1}$$

ここで、（1.1）より、

$$\rho = (1+\delta)\bar{\rho}, \tag{B.2}$$

である。すると、これのdivergenceをとって、さらにそれを$\bar{\rho}$で割ることによって、

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = 4\pi G\bar{\rho}\delta(1+\delta) + \frac{1}{a^2}\nabla_{\mathbf{x}}\delta\nabla_{\mathbf{x}}\Phi + \frac{1}{a^2}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}[(1+\delta)u^{\alpha}u^{\beta}], \tag{B.3}$$

となり、δと$\mathbf{u}$の微分方程式が得られる。ここで、（1.12）のPoisson 方程式より、

$$\Phi = -G\bar{\rho}\delta a^2\Delta(\mathbf{x}), \tag{B.4}$$

$$\Delta(\mathbf{x}) = \int\frac{d^3\mathbf{x}'\delta(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}. \tag{B.5}$$

また、

$$u^{\alpha} = \frac{a}{4\pi D_+}\frac{dD_+}{dt}\Delta_{,\alpha}. \tag{B.6}$$

線形近似が成り立つときは、前章より、

$$\delta \approx \delta_0 \propto D_+(t) \propto t^{2/3} \tag{B.7}$$

となっているのであるが、いま、ここでは、準線形領域を考えて、

$$\delta = \delta_0[1+\epsilon], \tag{B.8}$$

$$\delta_0 \ll 1, \quad \epsilon \ll 1$$

とおくことにより、δは、δ_0に対して二次の項まで評価する。

(B.3) に (B.5) と (B.6) を代入し、二次までの項をとると、

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2\epsilon}{dt^2}+2\left(\frac{1}{D}\frac{dD}{dt}+\frac{\dot{a}}{a}\right)\frac{d\epsilon}{dt} &= 4\pi G\bar{\rho}\delta_0 - G\bar{\rho}\frac{\delta_{0,\alpha}}{\delta_0}\Delta_{0,\alpha} \\
&\quad + \frac{1}{16\pi^2 D^2\delta_0}\left(\frac{dD}{dt}\right)^2\partial_\alpha\partial_\beta(\Delta_{0,\alpha}\Delta_{0,\beta}), \qquad \text{(B.9)} \\
\Delta_0 &= \int\frac{d^3\mathrm{x}'\delta_0(\mathrm{x}')}{|\mathrm{x}-\mathrm{x}'|}.
\end{aligned}
$$

今EDSでの議論なので、

$$\delta_0 \propto D \propto t^{2/3} \propto a, \tag{B.10}$$

また、

$$\frac{8\pi G\bar{\rho}}{3H^2} = \Omega = 1,$$

より、

$$6\pi G\bar{\rho}t^2 = 1 \tag{B.11}$$

よって、これらを代入すると、(B.9) は、

$$\frac{d^2\epsilon}{dt^2}+\frac{8}{3t}\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{2}{3t^2}\delta_0 - \frac{1}{6\pi t^2}\frac{\delta_{0,\alpha}}{\delta_0}\Delta_{0,\alpha} + \frac{1}{36\pi^2\delta_0 t^2}\partial_\alpha\partial_\beta(\Delta_{0,\alpha}\Delta_{0,\beta}), \tag{B.12}$$

となる。ここで、

$$\partial_\alpha\partial_\beta(\Delta_{0,\alpha}\Delta_{0,\beta}) = \Delta_{0,\alpha\beta}\Delta_{0,\alpha\beta} + \Delta_{0,\alpha\alpha}\Delta_{0,\beta\beta} + \Delta_{0,\alpha\alpha\beta}\Delta_{0,\beta} + \Delta_{0,\alpha}\Delta_{0,\alpha\beta\beta} \tag{B.13}$$

で、さらに、Laplace方程式の解、

$$\nabla^2\frac{1}{|\mathrm{x}-\mathrm{x}'|} = -4\pi\delta_D(\mathrm{x}-\mathrm{x}') \tag{B.14}$$

より、

$$\Delta_{0,\alpha\alpha} = \int\nabla^2\frac{1}{|\mathrm{x}-\mathrm{x}'|}\delta_0(\mathrm{x}')d^3\mathrm{x}' = -4\pi\delta_0(\mathrm{x}), \tag{B.15}$$

となるので、これを使って（B.12）より、ϵを求めると、結局

$$\epsilon = \frac{5}{7}\delta_0 + \frac{1}{4\pi}\frac{\delta_{0,\alpha}}{\delta_0}\Delta_{0,\alpha} + \frac{1}{56\pi^2}\frac{1}{\delta_0}\Delta_{0,\alpha\beta}\Delta_{0,\alpha\beta}, \tag{B.16}$$

となり、二次の摂動理論では、密度揺らぎは、

$$\delta = \delta_0 + \frac{5}{7}\delta_0^2 + \frac{1}{4\pi}\delta_{0,\alpha}\Delta_{0,\alpha} + \frac{1}{56\pi^2}\Delta_{0,\alpha\beta}\Delta_{0,\alpha\beta}, \tag{B.17}$$

と、求められる。

C　球対称モデル

揺らぎの形が球対称のときは、揺らぎがどのような大きさであっても、解析解が求まる。ここでは、EDSのなかでの球対称モデルでの密度揺らぎの時間発展の解析解を求める。

まず、球対称モデルなので、

$$\begin{aligned} r &= |\mathbf{x}|, \\ r_0 &= |\mathbf{q}|, \end{aligned} \tag{C.1}$$

とおく。すると、密度揺らぎは、

$$\delta = \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 - 1, \tag{C.2}$$

とあらわされる。球対称のときのポテンシャルは、

$$\Phi = \frac{a^2 r^2 \delta}{9t^2}. \tag{C.3}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(a^2 \frac{dr}{dt}\right) &= -\frac{d\Phi}{dr} \\ &= -\frac{2a^2 r}{9t^2}\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^3 - 1\right]. \end{aligned} \tag{C.4}$$

ここで、$R = a\mathrm{r}/\mathrm{r}_0$と定義して、$R$をつかって上式を書き直してやると、

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{2a^3}{9t^2} R^2, \tag{C.5}$$

となる。

- 揺らぎが正の場合（$\delta > 0$）

  （C.5）において、$a \to 0$で、$\delta = a$という初期条件を使うと、

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = a\left(\frac{1}{R} - \frac{5}{3}\right) \tag{C.6}$$

となる。これを解いて、

$$\begin{aligned} R &= \frac{3}{10}(1-\cos\theta), \\ a &= \frac{3}{5}\left[\frac{3}{4}(\theta-\sin\theta)\right]^{2/3}, \end{aligned} \tag{C.7}$$

より、密度揺らぎは、

$$\begin{aligned} \delta &= \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 - 1 \\ &= \left(\frac{a}{R}\right)^3 - 1 \\ &= \frac{9}{2}\frac{(\theta-\sin\theta)^2}{(1-\cos\theta)^3} - 1, \end{aligned} \tag{C.8}$$

となる。

- 揺らぎが負の場合（ボイドの場合：$\delta < 0$）

（C.5）において、$a \to 0$で、$\delta = -a$という初期条件を使って、

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = a\left(\frac{1}{R}+\frac{5}{3}\right) \tag{C.9}$$

となる。これを解いて、

$$\begin{aligned} R &= \frac{3}{10}(\cosh\theta-1), \\ a &= \frac{3}{5}\left[\frac{3}{4}(\sinh\theta-\theta)\right]^{2/3}, \end{aligned} \tag{C.10}$$

より、密度揺らぎは、

$$\delta = \frac{9}{2}\frac{(\sinh\theta-\theta)^2}{(\cosh\theta-1)^3} - 1, \tag{C.11}$$

となる。

このように、球対称モデルでは、媒介変数θをつかって解析解を求めることができる。つまり、揺らぎの形を球対称であると仮定すれば、揺らぎがどんなに非線型であっても解析解を得ることはできる。以下、各準非線形近似の球対称モデルでの解を求めておく。それぞれの解の振る舞いは図 3.1を参照されたい。

C.1　二次の摂動理論での解

球対称モデルの二次の摂動理論での解を求める。一般解は、(B.17) より、

$$\delta = \delta_0 + \frac{5}{7}\delta_0^2 + \frac{1}{4\pi}\delta_{0,\alpha}\Delta_{0,\alpha} + \frac{1}{56\pi^2}\Delta_{0,\alpha\beta}\Delta_{0,\alpha\beta}.$$

物質密度は一様であることを仮定しているので、第2項目は、ゼロになる。また、(B.15) より、

$$\Delta_{0,\alpha\alpha} = -4\pi\delta_0(\mathbf{x}),$$

となり、球対称より、

$$\Delta_{0,11} = \Delta_{0,22} = \Delta_{0,33} = -\frac{4}{3}\pi\delta_0, \tag{C.12}$$

よって、第3項目に対して、

$$\Delta_{0,\alpha\beta}\Delta_{0,\alpha\beta} = (\Delta_{0,11})^2 + (\Delta_{0,22})^2 + (\Delta_{0,33})^2 = \frac{16}{3}\pi^2\delta_0^2, \tag{C.13}$$

となるので、結局密度ゆらぎは、

$$\delta = \delta_0 + \frac{17}{21}\delta_0^2,$$

となる。よって、

- 揺らぎが正の場合 ($\delta > 0$)

  $\delta = a$ を代入して、

  $$\delta = a + \frac{17}{21}a^2. \tag{C.14}$$

- 揺らぎが負の場合 (ボイドの場合：$\delta < 0$)

  $\delta = -a$ を代入して、

  $$\delta = -a + \frac{17}{21}a^2. \tag{C.15}$$

C.2 Frozen flow 近似での解

球対称モデルの中でのFrozen flow 近似の解を求める。

- 揺らぎが正の場合（$\delta > 0$）

（2.8）において、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial a} &= -\frac{2}{3a\dot{a}^2}\nabla_r \Phi_{init} \\
&= -\frac{1}{3}r,
\end{aligned}
\tag{C.16}
$$

となるので、これをといて、球の半径の時間発展は、

$$
r = r_0 \exp\left(-\frac{a}{3}\right). \tag{C.17}
$$

よって、密度揺らぎは、

$$
\delta = \exp a - 1, \tag{C.18}
$$

となる。

- 揺らぎが負の場合（ボイドの場合：$\delta < 0$）

（2.8）において、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial a} &= -\frac{2}{3a\dot{a}^2}\nabla_r \Phi_{init} \\
&= \frac{1}{3}r,
\end{aligned}
\tag{C.19}
$$

となるので、これをといて、球の半径の時間発展は、

$$
r = r_0 \exp\left(\frac{a}{3}\right). \tag{C.20}
$$

よって、密度揺らぎは、

$$
\delta = \exp(-a) - 1, \tag{C.21}
$$

となる。

C.3 Linear potential 近似での解

球対称モデルの中でのLinear potential 近似の解を求める。

- 揺らぎが正の場合（$\delta > 0$）

 （2.10）より、

$$\frac{d}{dt}\left(a^2\frac{dr}{dt}\right) = -\frac{2a^3}{9t^2}r, \tag{C.22}$$

 となるので、結局解くべき微分方程式は、微分変数をとりかえて、

$$\frac{d^2r}{da^2} + \frac{3}{2a}\frac{dr}{da} + \frac{r}{2a} = 0, \tag{C.23}$$

 となり、これを解いて、

$$r = \frac{r_0}{\sqrt{2a}}\sin\sqrt{2a}. \tag{C.24}$$

 よって、

$$\delta = \left(\frac{\sqrt{2a}}{\sin\sqrt{2a}}\right)^3 - 1. \tag{C.25}$$

- 揺らぎが負の場合（ボイドの場合：$\delta < 0$）

 （2.10）より、

$$\frac{d}{dt}\left(a^2\frac{dr}{dt}\right) = \frac{2a^3}{9t^2}r, \tag{C.26}$$

 となるので、結局解くべき微分方程式は、

$$\frac{d^2r}{da^2} + \frac{3}{2a}\frac{dr}{da} - \frac{r}{2a} = 0, \tag{C.27}$$

 となり、これを解いて、

$$r = \frac{r_0}{\sqrt{2a}}\sinh\sqrt{2a}. \tag{C.28}$$

 よって、

$$\delta = \left(\frac{\sqrt{2a}}{\sinh\sqrt{2a}}\right)^3 - 1. \tag{C.29}$$

C.3.1 Zel'dovich 近似での解

球対称モデルの中でのZel'dovich 近似解は、

- 揺らぎが正の場合（$\delta > 0$）

  Φ の初期状態は、線形理論で与えられるので、(C.3）で、$\delta = a$として、

$$\Phi_{init} = \frac{a^3 r^2}{9t^2}, \tag{C.30}$$

となるので、

$$\Phi_0 = \frac{a^3 r_0^2}{9t^2}, \tag{C.31}$$

よって、

$$\psi_r^{(1)} = -\frac{2a^3 r_0}{9t^2}. \tag{C.32}$$

さらに、D_+も、線形理論より与えられて、

$$\delta + 1 = J^{-1}$$

より、

$$D_+ = \frac{3t^2}{2a^2}. \tag{C.33}$$

よって、球の半径の時間発展は、

$$r = r_0\left(1 - \frac{a}{3}\right), \tag{C.34}$$

となり、これにより密度揺らぎの成長の式が、

$$\begin{aligned}\delta &= \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 - 1\\ &= \left(1 - \frac{a}{3}\right)^{-3} - 1,\end{aligned} \tag{C.35}$$

と求まる。

- 揺らぎが負の場合（ボイドの場合：$\delta < 0$）

Φ の初期状態は、(C.3) で、$\delta = -a$ として、

$$\Phi_{init} = -\frac{a^3 r^2}{9t^2}, \tag{C.36}$$

となるので、

$$\Phi_0 = -\frac{a^3 r_0^2}{9t^2}, \tag{C.37}$$

よって、

$$\psi_r^{(1)} = \frac{2a^3 r_0}{9t^2}. \tag{C.38}$$

さらに、D_+は、線形理論より

$$D_+ = \frac{3t^2}{2a^2}. \tag{C.39}$$

よって、球の半径の時間発展は、

$$r = r_0\left(1 + \frac{a}{3}\right), \tag{C.40}$$

となり、これにより密度揺らぎの成長の式が、

$$\begin{aligned} \delta &= \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 - 1 \\ &= \left(1 + \frac{a}{3}\right)^{-3} - 1, \end{aligned} \tag{C.41}$$

と求まる。

C.3.2 Post-Zel'dovich 近似での解

- 揺らぎが正の場合（$\delta > 0$）

(C.32) より、

$$\psi_{1,1}^{(1)} = \psi_{2,2}^{(1)} = \psi_{3,3}^{(1)} = -\frac{2a^3}{9t^2},$$

なので、

$$\psi^{(2)}_{i,i} = -\frac{4a^6}{63t^4}.$$

よって、

$$\psi^{(2)}_{r} = -\frac{4a^6 r_0}{189t^4},$$

より、球の半径の時間発展は、

$$r = r_0\left(1 - \frac{a}{3} - \frac{a^2}{21}\right), \tag{C.42}$$

となり、これにより密度揺らぎの成長の式が、

$$\begin{aligned} \delta &= \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 - 1 \\ &= \left(1 - \frac{a}{3} - \frac{a^2}{21}\right)^{-3} - 1, \end{aligned} \tag{C.43}$$

と求まる。

- 揺らぎが負の場合（ボイドの場合：$\delta < 0$）

（C.38）より、

$$\psi^{(1)}_{1,1} = \psi^{(1)}_{2,2} = \psi^{(1)}_{3,3} = \frac{2a^3}{9t^2},$$

なので、

$$\psi^{(2)}_{i,i} = -\frac{4a^6}{63t^4}.$$

よって、

$$\psi^{(2)}_{r} = -\frac{4a^6 r_0}{189t^4},$$

より、球の半径の時間発展は、

$$r = r_0\left(1 + \frac{a}{3} - \frac{a^2}{21}\right), \tag{C.44}$$

となり、これにより密度揺らぎの成長の式が、

$$\begin{aligned}\delta &= \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 - 1 \\ &= \left(1 + \frac{a}{3} - \frac{a^2}{21}\right)^{-3} - 1,\end{aligned} \tag{C.45}$$

と求まる。

C.3.3 Post-post-Zel'dovich 近似での解

- 揺らぎが正の場合（$\delta > 0$）

（C.32）（C.42）より、

$$\psi^{(1)}_{1,1} = \psi^{(1)}_{2,2} = \psi^{(1)}_{3,3} = -\frac{2a^3}{9t^2},$$
$$\psi^{(2)}_{1,1} = \psi^{(2)}_{2,2} = \psi^{(2)}_{3,3} = -\frac{4a^6}{189t^4},$$

より、

$$\psi^{(3)}_{i,i} = -\frac{184a^9}{15309t^6}, \tag{C.46}$$

となるので、

$$\psi^{(3)}_{r} = -\frac{184a^9 r_0}{45927t^6} \tag{C.47}$$

よって、球の半径の時間発展は、

$$r = r_0\left(1 - \frac{a}{3} - \frac{a^2}{21} - \frac{23a^3}{1701}\right), \tag{C.48}$$

となり、これによって密度揺らぎの成長の式は、

$$\begin{aligned}\delta &= \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 - 1 \\ &= \left(1 - \frac{a}{3} - \frac{a^2}{21} - \frac{23a^3}{1701}\right)^{-3} - 1,\end{aligned} \tag{C.49}$$

となる。

- 揺らぎが負の場合（ボイドの場合：$\delta < 0$）

（C.38）（C.44）より、

$$\psi^{(1)}_{1,1} = \psi^{(1)}_{2,2} = \psi^{(1)}_{3,3} = \frac{2a^3}{9t^2},$$
$$\psi^{(2)}_{1,1} = \psi^{(2)}_{2,2} = \psi^{(2)}_{3,3} = -\frac{4a^6}{189t^4},$$

より、

$$\psi^{(3)}_{i,i} = \frac{184a^9}{15309t^6}, \tag{C.50}$$

となるので、

$$\psi^{(3)}_{r} = \frac{184a^9 r_0}{45927t^6} \tag{C.51}$$

よって、球の半径の時間発展は、

$$r = r_0\left(1 + \frac{a}{3} - \frac{a^2}{21} + \frac{23a^3}{1701}\right), \tag{C.52}$$

となり、これによって密度揺らぎの成長の式は、

$$\begin{aligned}\delta &= \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 - 1 \\ &= \left(1 + \frac{a}{3} - \frac{a^2}{21} + \frac{23a^3}{1701}\right)^{-3} - 1, \end{aligned} \tag{C.53}$$

となる。

D　回転楕円体のPotential 理論

まず、楕円体状に一様に分布する質量がつくるポテンシャルを導きたい。[10]

$a=b\neq c$の楕円体を考える。円柱座標系(R,z)を、さらに(u,v)を使って、

$$\begin{cases} R=\Delta\cosh u\sin v, \\ z=\Delta\sinh u\cos v. \end{cases} \tag{D.1}$$

$$(\Delta : const.)$$

と表すと、

$$\frac{R^2}{(\Delta\cosh u)^2}+\frac{z^2}{(\Delta\sinh u)^2}=\sin^2 v+\cos^2 v=1, \tag{D.2}$$

$$\frac{R^2}{(\Delta\sin v)^2}-\frac{z^2}{(\Delta\cos v)^2}=\cosh^2 u-\sinh^2 u=1, \tag{D.3}$$

より、$u=const$の曲線は、共焦点$(\pm\Delta,0)$の楕円を、$v=const$の曲線は、共焦点$(\pm\Delta,0)$の双曲線を、それぞれあらわしている。

ポテンシャル$\tilde{\Phi}$のgradientは

$$\nabla\tilde{\Phi}=\frac{1}{\Delta\sqrt{\sinh^2 u+\cos^2 v}}\left[\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial u}\mathbf{e}_u+\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial v}\mathbf{e}_v\right]+\frac{1}{\Delta\cosh u\sin v}\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi. \tag{D.4}$$

さらに、

$$\Delta\tilde{\Phi}=\frac{1}{\Delta^2\left(\sinh^2 u+\cos^2 v\right)}\left[\frac{1}{\cosh u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\cosh u\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial u}\right)+\frac{1}{\sin v}\frac{\partial}{\partial v}\left(\sin v\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial v}\right)\right] \\ +\frac{1}{\Delta^2\cosh^2 u\sin^2 v}\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial\phi^2}. \tag{D.5}$$

ここで、ポテンシャルを、"radial" coodinate uの関数、$\tilde{\Phi}(u)$と考える。すると、ラプラス方程式、$\Delta\tilde{\Phi}=0$より、

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\cosh u\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial u}\right)=0, \tag{D.6}$$

となり、これを満たすのは、$\tilde{\Phi}=\tilde{\Phi}_0(const)$の場合を除くと、

$$\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial u}=A\mathrm{sech}\ u, \tag{D.7}$$

$$\left(A : const.\quad ,\mathrm{sech}\ u=\frac{1}{\cosh u}\right),$$

のとき。これを積分して、

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Phi} &= A\left[\arctan(\sinh u) + \Psi_0\right] \\
&= A\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin(\mathrm{sech}\ u) + \Psi_0\right], \qquad \text{(D.8)} \\
&\qquad (\Psi_0 : const.)
\end{aligned}
$$

uが無限大のときは、sech $u \to 0$ となるので、このとき上式は、

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Phi} &\simeq A\left[\frac{\pi}{2} + \Psi_0 - \mathrm{sech}\ u\right] \\
&\simeq A\left[\frac{\pi}{2} + \Psi_0 - \frac{\Delta}{r}\right], \qquad \text{(D.9)} \\
&\qquad (r:\text{通常の極座標系の動径})
\end{aligned}
$$

となる。

これが、ある質量Mがつくる、重力ポテンシャルの形になるためには、無限遠で、$\tilde{\Phi} = 0$ とならなければならない。よって、$\Psi_0 = -\frac{1}{2}\pi$、$A = \frac{GM}{\Delta}$ と与えて、次のように、ポテンシャルを定義する。

$$
\tilde{\Phi} = -\frac{GM}{\Delta} \times \begin{cases} \arcsin(\mathrm{sech}\ u_0) & (u < u_0) \\ \arcsin(\mathrm{sech}\ u). & (u \geq u_0) \end{cases} \qquad \text{(D.10)}
$$

このポテンシャルは、どこでも連続で、$u = u_0$以外では、ラプラス方程式$\Delta\tilde{\Phi} = 0$を満たしている。つまり、これは$u = u_0$の表面に分布する物質のshellのつくるポテンシャルになっている。このshellは、

$$
\begin{aligned}
a &\equiv \Delta \cosh u_0, \\
c &\equiv \Delta \sinh u_0,
\end{aligned}
$$

の軸を持っている。まず、$a = b > c$のときを考えると、離心率は

$$
e \equiv \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} = \mathrm{sech}\ u_0, \qquad \text{(D.11)}
$$

となるので、(D.10) を書き直すと、

$$
\tilde{\Phi} = -\frac{GM}{ae} \times \begin{cases} \arcsin(e) & (u < u_0) \\ \arcsin(\mathrm{sech}\ u), & (u \geq u_0) \end{cases} \qquad \text{(D.12)}
$$

となる。今、

$$\begin{aligned} \rho &= \rho(m^2), \\ const &= m^2 \equiv R^2 + \frac{z^2}{1-e^2}, \end{aligned} \tag{D.13}$$

とあらわされる、等密度面を考える。楕円体の体積は、

$$V = \frac{4}{3}\pi a^2 c = \frac{4}{3}\pi a^3 \sqrt{1-e^2}. \tag{D.14}$$

よって、$m \sim m + \delta m$ にある質量は、いま、$a = m$ とおけるので、

$$\delta M = \frac{4}{3}\pi \rho(m^2)\sqrt{1-e^2}\delta(m^3). \tag{D.15}$$

すると、(D.12) より、

$$\delta\tilde{\Phi}_{int} = -2\pi G\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\arcsin(e)\rho(m^2)\delta(m^2), \tag{D.16}$$

$$\delta\tilde{\Phi}_{ext} = -2\pi G\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\arcsin(\mathrm{sech}\ u_m)\rho(m^2)\delta(m^2). \tag{D.17}$$

(いま、ここで、$\delta(m^3) = 3m^2\delta m, \delta(m^2) = 2m\delta m$ より、$\delta(m^3) = 3/2m\delta(m^2)$ を使った。)

楕円体に分布する質量がつくるポテンシャルを求めるには、これらをすべてのshellについて、足しあわせればよい。

いま、

$$\Psi(m) = \int_0^{m^2} \rho(m^2)dm^2, \tag{D.18}$$

と、$\Psi(m)$ を定義してやる。すると、

$$\sum_{m>m_0} \delta\tilde{\Phi}_{int} = -2\pi G\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\arcsin(e)\left[\Psi(\infty) - \Psi(m_0)\right]. \tag{D.19}$$

同様に、

$$\begin{aligned} \sum_{m<m_0} \delta\tilde{\Phi}_{ext} = &- 2\pi G\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\int_0^{m^2} \arcsin(\mathrm{sech}\ u_m)\rho(m^2)dm^2 \\ = &- 2\pi G\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\left\{\left[\Psi(m)\arcsin(\mathrm{sech}\ u_m)\right]_{m=0}^{m_0}\right. \\ &- \left.\int_{m=0}^{m_0} \frac{\Psi(m)d\ \mathrm{sech}\ u_m}{\sqrt{1-\mathrm{sech}^2\ u_m}}\right\}. \end{aligned} \tag{D.20}$$

さて、ここで、

$$\frac{R^2}{\Delta_m^2 \cosh^2 u_m} + \frac{z^2}{\Delta_m^2 \sinh^2 u_m} = 1, \tag{D.21}$$

$$\Delta_m = me,$$

より、

$$\frac{R^2}{1+\sinh^2 u_m} + \frac{z^2}{\sinh^2 u_m} = m^2 e^2. \tag{D.22}$$

$m = 0$のとき、$\sinh u_m = 0$。また、$m = m_0$のとき、$\sinh u_m = \sqrt{1-e^2}/e$。よって、これらの極限をつかって、$\tilde{\Phi}_{int}$と$\tilde{\Phi}_{ext}$をつなぎあわせると、

$$\tilde{\Phi} \quad = -2\pi G \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left[\Psi(\infty) \arcsin(e) - \int_{\sinh u_m = \sqrt{1-e^2}/e}^{\infty} \frac{\Psi(m) d\ \sinh u_m}{1+\sinh^2 u_m} \right]. \tag{D.23}$$

ここで、

$$\tau \equiv a^2 e^2 \left[\sinh^2 u_m - \left(\frac{1}{e^2} - 1 \right) \right], \tag{D.24}$$

を、定義する。すると、(D.21) は、

$$\frac{R^2}{\tau + a^2} + \frac{z^2}{\tau + c^2} = \frac{m^2}{a^2}, \tag{D.25}$$

$$\left(c \equiv \sqrt{1-e^2} a \right).$$

これを使って$\tilde{\Phi}$を書き直すと、

$$\tilde{\Phi} \quad = -2\pi G \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left[\Psi(\infty) \arcsin(e) - \frac{ae}{2} \int_0^{\infty} \frac{\Psi(m) d\tau}{(\tau + a^2)\sqrt{\tau + c^2}} \right]. \tag{D.26}$$

ここで、楕円体内の密度が一様のとき、

$$\Psi(m) = \rho_0 \times \begin{cases} m^2, & (m^2 < a^2) \\ a^2, & (m^2 \geq a^2) \end{cases}$$

よって、

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} \quad = \quad & - \quad 2\pi G \rho_0 a^2 \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left[\arcsin(e) \right. \\ & - \left. \frac{ae}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{R^2}{\tau + a^2} + \frac{z^2}{\tau + c^2} \right) \frac{d\tau}{(\tau + a^2)\sqrt{\tau + c^2}} \right]. \end{aligned} \tag{D.27}$$

ここで、ポテンシャルなので、上式で、定数項を無視して、(基準のとりかたをずらして）整理すると、

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Phi} &= \pi G \rho_0 \left[A R^2 + C z^2 \right], \\
A &= a^2 c \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{(\tau + a^2)^2 \sqrt{\tau + c^2}}, \\
C &= a^2 c \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{(\tau + a^2)(\tau + c^2)^{3/2}}.
\end{aligned}
\tag{D.28}
$$

いま、$a = b > c$（oblate）なので、

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{(1-e^2)^{1/2}}{e^2} \left[\frac{\sin^{-1} e}{e} - (1-e^2)^{1/2} \right], \\
C &= \frac{2(1-e^2)^{1/2}}{e^2} \left[\frac{1}{(1-e^2)^{1/2}} - \frac{\sin^{-1} e}{e} \right], \\
& \left\langle e = \left(1 - c^2/a^2 \right)^{1/2} \right\rangle
\end{aligned}
\tag{D.29}
$$

同様にして、$a = b < c$（prolate）のときは、

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1-\bar{e}^2}{\bar{e}^2} \left[\frac{1}{1-\bar{e}^2} - \frac{1}{2\bar{e}} \ln\left(\frac{1+\bar{e}}{1-\bar{e}} \right) \right], \\
C &= \frac{2(1-\bar{e}^2)}{\bar{e}^2} \left[\frac{1}{2\bar{e}} \ln\left(\frac{1+\bar{e}}{1-\bar{e}} \right) - 1 \right], \\
& \left\langle \bar{e} = \left(1 - a^2/c^2 \right)^{1/2} \right\rangle
\end{aligned}
\tag{D.30}
$$

となる。

謝辞

本研究を行うにあたり、森川雅博教授には様々なご教示をいただきました。感謝しております。共同研究者の松原隆彦氏、毛利英明氏には実りある議論をして頂き、また、多くの有意義なアドバイスをして下さったこと、感謝の念に耐えません。また、お茶大宇宙物理研究室の黒川知美氏を始めとする関係者の皆様にも様々な協力を頂きました。有り難うございます。また、現在の勤務先であるシステム計画研究所の尾花久代表取締役を始め、染野和昭氏、北川美穂氏、松田成史氏など多くの所員の方々には、様々なバックアップと心配りをいただきました。そのおかげでこの論文を完成させることができました。本当に有り難うございます。最後にいつも心の支えになっていただきました私のたくさんの友人、両親、兄弟、そしていつも可愛い仕種で私を和ませてくれた小さな同居人に心から感謝します。

参考文献

[1] Peebles, P. J. E. 1980, The Large-Scale Structure of Universe (Princeton, NJ : Princeton Univ. Press)

[2] Peebles, P. J. E. 1993, Principles of Physical Cosmology (Princeton, NJ : Princeton Univ. Press)

[3] Matarrese, S., Lucchin, F., Moscardini, L., & Saez, D. 1992, MNRAS, 259, 437

[4] Brainerd, T. G., Scherrer, R. J., & Villumsen, J. V. 1993, ApJ, 418, 570

[5] Bernardeau, F. 1994, ApJ, 427, 51

[6] Munshi, D., Sahni, V., & Starobinsky, A, A. 1994, ApJ, 436, 517

[7] Sahni, V., & Coles, P., 1995, Phys. Rep. 262, 1

[8] Sahni, V., & Shandarin, S., 1996, MNRAS, 282, 641

[9] Bouchet, F. R., Colombi, S., Hivon, E., & Juszkiewicz, R. 1995, A & A, 296, 575

[10] Binney, J. & Tremaine, S. 1987, Galactic Dynamics (Princeton, NJ : Princeton Univ. Press)

[11] Eisenstein, D. J., & Loeb, A. 1995, ApJ, 439, 520

[12] Peacock, J. A., & Heavens, A. F. 1985, MNRAS, 217, 805

[13] Kellogg, O. 1953, Foundation of Potential Theory (New York : Dover)

[14] Bagla, J. S., & Padmanabham, T. 1994, MNRAS, 266, 227

[15] Bond, J. R., & Myers, S. T. 1996, ApJ, 103, 1

[16] Buchert, T. 1989, A & A, 223, 9

[17] Buchert, T. 1992, MNRAS, 254, 729

[18] Buchert, T. 1994, MNRAS, 267, 811

[19] Buchert, T., & Ehlers, J. 1993, MNRAS, 264, 375

[20] Catelan, P. 1995, MNRAS, 276, 115

[21] Fry, J. N. 1984, ApJ, 279, 499

[22] Goroff, M. H., Grinstein, B., ReyS. -J., & Wise, M. B. 1986, ApJ, 311, 6

[23] Icke, V. 1973, A & A, 27, 1

[24] Lin, C. C., Mestel, L., & Shu, F. H. 1965, ApJ, 142, 1431

[25] Lynden-Bell, D. 1962, Proc. Cambridge Phil. Soc., 50, 709

[26] Lynden-Bell, D. 1964, ApJ, 139, 1195

[27] Monaco, P. 1997, MNRAS, 287, 753

[28] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. 1992, Numerical Recipe in Fortran 2nd ed. (Cambridge, Cambridge Univ. Press)

[29] White, S. D. M., & Silk, J. 1979, ApJ, 231, 1

[30] Zel'dovich, Ya. B. 1970, A & A, 5, 84

[31] Zel'dovich, Ya. B. 1973, Astrophysics, 6, 164

[32] Bender, C. M. & Orszag, S. A. 1978 ; Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers (New York, McGraw-hill Book Company)

[33] Monin, A. S., & Yaglom, A. M. 1975, Statistical Fluid Mechanics (Cambridge ; MIT Press)

[34] Górski, K. 1988, ApJ, 332, L7

[35] Górski, K., Banday, A. J., Bennett, C. L., Hinshaw, G., Kogut, A., Smoot, G. F., Wright, E. L. 1996, ApJ, 464, L11

[36] Fisher, K. B., Davis, M., Strauss, M. A., Yahil, A., & Huchra, J. P. 1994, MNRAS, 267, 927

[37] Efstathiou, G., Bond, J. R., & White, S. D. M. 1992, MNRAS, 258, 1p

[38] Zurek, W. H., Quinn, P. J., Salmon, J. K., & Warren, M. S. 1994, ApJ, 431, 559

[39] Seto, N., & Yokoyama, J. 1998, ApJ, 492, 421

[40] Porciani, C. 1997, MNRAS, 290, 639

[41] Sheth, R. K. 1996, MNRAS, 279, 1311

[42] Diaferio, A., & Geller, M. 1996, ApJ, 467, 19

[43] Bond, J. R., & Efstathiou, G. 1984, ApJ, 285, L45

[44] Davis, M., & Peebles, P. J. E. 1983, ApJ, 267, 465

[45] Marzke, R. O., Geller, M. J., da Costa, L. N., & Huchra, J. P. 1995, ApJ, 110, 477