

学位論文 博士（理学）

乳幼児の冠動脈内における  
モデル化と流れのシミュレーション

Modeling and flow simulation  
about coronary artery of infant

お茶の水女子大学大学院  
人間文化創成科学研究科理学専攻

齋藤 文

2018年3月

# 目次

Abstract	i
第1章 序論	1
研究背景	2
参考文献	8
第2章	
血管壁の粘弾性を考慮したアスペクト比の大きい円管内流れの数値計算	11
2-1 緒言	12
2-2 支配方程式	13
2-3 フラクショナルステップ法	15
2-4 SOR 法	16
2-5 計算領域	17
2-6 一般座標変換	18
2-7 時間を含んだ一般座標変換	23
2-8 計算条件	25
2-9 計算結果	27
2-9-1 直管内のサイン波	27
2-9-2 90° 曲がり管内流れ	30
2-10 結論	38
参考文献	39
第3章	
冠状動脈をモデルとした壁面に超弾性特性のある円管内流れの数値解析	41
3-1 緒言	42
3-2 支配方程式	46
3-3 スタッガード格子	48
3-4 SIMPLE (PISO) 法	49
3-4-1 $x$ 方向運動方程式の離散化	50
3-4-2 $y$ 方向運動方程式の離散化	53
3-4-3 連続の式と運動方程式のカップリング	56

3-5	対流項の離散化	59
3-6	計算条件	60
3-7	妥当性の評価	61
3-8	計算結果	63
3-9	結論	65
	参考文献	66

## 第4章

### 冠動脈を模した超弾性特性のある分岐管内流れの数値解析

		68
4-1	緒言	69
4-2	計算領域	70
4-3	計算条件	71
4-4	計算結果	72
4-5	結論	79
	参考文献	80

## 第5章

### 拡大・収縮する球上に置かれた管内流れのシミュレーション

		81
5-1	緒言	82
5-2	計算領域	84
5-3	支配方程式	85
5-4	計算条件	86
5-5	計算結果	87
5-6	結論	98
	参考文献	97

## 第6章

	総括	98
--	----	----

## 謝辞

## Abstract

Kawasaki Disease is one of the diseases that children under four years old tend to contract. The definition of this disease are as follows <sup>[1-1]</sup>.

1. Lasting of high fever for more than 5 days.
2. Congestion of conjunctivas of both eyes
3. Strawberry tongue, red mouth and throat
4. Polymorphous rash in all body parts
5. [Acute stage] Swollen hands and feet  
[Convalescence stage] Desquamation from fingertips
6. Cervical lymphadenopathy in acute stage

In these major 6 symptoms, admission of Kawasaki Disease needs more than 5 symptoms. However, in some cases, it is admitted to be Kawasaki Disease in case of occurrence of just only 4 symptoms.

This disease was presented for the first time in the world by Tomisaku Kawasaki, Japanese doctor, in 1967. After that, other reports became to be made in all over the world. The number of patients is larger in Asia especially Japan than other region. After year of 1982 and 1986 that were epidemic period in which number of patients was about 15,000 a year, number of patients was about 6,000 a year for a while. However, recently, number of patients tends to increase gradually. Moreover, year of 2013 and 2014 had larger patients than year of epidemic, 1982 and 1986.

The cause of this disease has been known to be vasculitis which is damage of blood vessel by enzyme caused from white blood cell since the reaction to protect the self-body occurs too strong when invasion to the interior of the body is made by virus and so on. Nevertheless, the reason why this kind of reaction occurs has not been revealed and the trigger of this reaction has not been specialized.

Vasculitis sometimes makes aneurysms on coronary arteries of patients' heart. If there are aneurysms, thromboses are easy to be formed and that become the cause of heart attack. In other case, it is possible that the inner wall of coronary arteries that are damaged by vasculitis become atherosclerosis. Coronary arteries are important blood vessels that pump blood to cardiac muscle making possible heart to beat. Thus, if these arteries has been injure, heart cannot maintain its function and that leads to the death in the worst case.

It is necessary to research the blood flow situation in the inner of coronary arteries to

presume the damage of coronary arteries suffered from Kawasaki Disease. The first step for investigation of inner coronary arteries is visualization experiments or measurements of flow velocity or other flow index. However, it is difficult to implement those experiments with thinking about necessity of the expensive apparatus or mature technique since the diameter of infant coronary arteries is very thin like as 1~2 mm. Moreover, inner flow of coronary arteries is very complicated since coronary arteries have viscoelastic characteristic on its wall and branching configuration. With thinking about uncertainty of measurement, it is almost impossible to grasp the inner situation experimentally.

Hence, simulation with numerical analysis is effectual method to reveal the flow situation of inner coronary arteries. Large-scale apparatus is unnecessary in numerical simulation and it is not limited physically despite the fact that it is necessary to confirm whether real phenomena is reproduced.

Complicated flow situation that was not able to be elucidated ever has been able to be analyzed in detail since the computational technique has been improved recently. There are some researches about flow in coronary arteries of Kawasaki Disease with numerical simulation <sup>[1-9],[1-10]</sup>. However, they treat vessel wall of coronary arteries as rigid body though these are viscoelastic intrinsically and they does not take into account that coronary arteries are forced to move periodically with synchronizing with heart beat since that blood vessel are on the outer wall of heart. Thus, inner flow of coronary arteries has not been elucidated so far.

In this research, vessel wall of coronary arteries is treated as viscoelastic body to investigate interaction between flow and vessel wall. Moreover, effect of displacement of coronary arteries is investigated.

Outline about these research are as follows.

## **Section 2 Numerical Simulation of the Flow in the Large Aspect Ratio Pipe with the Viscoelasticity Effect of Blood Vessel wall**

As the first step to reveal the inner situation of coronary arteries, simple spring-dumper model was adopted as viscoelasticity of vessel wall. With that condition, it became capable to simulate with the effect of the force that wall receive from fluid flow. It was showed the necessity the analysis with viscoelasticity comparing with the case of rigid body.

### **Section 3 Numerical Analysis of Flow in a Hyperelastic Circular Tube Model of a Coronary Artery**

Next, Mooney-Rivlin model was adopted as hyperelasticity that make possible to model more real vessel wall of coronary arteries. The situation of deformation of vessel wall was grasped.

### **Section 4 Numerical Analysis of Flow in the Branch Pipe with Hyperelasticity Modelling on a Coronary Artery**

The method in Section 3 was applied to branching configuration that is characteristic to coronary arteries. The difference of flow situation between various branching angles was showed.

### **Section 5 Flow Simulation in the Pipe on the Sphere with Expand and Contract**

To investigate extent that the flow was affected by heartbeat, pipe modeling coronary artery was set on the sphere which expands and contracts temporally. The characteristic flow situation was revealed.

# 第 1 章

## 序論

## 研究背景

乳幼児がかかりやすい病気の一つに川崎病がある。この病気では、高熱が 1～2 週間続き、手足先の皮膚がむけるといった症状があらわれる。定義として以下の症状が挙げられる<sup>[1-1]</sup>。

1. 5 日以上続く発熱.
2. 両側眼球結膜の充血.
3. 口唇, 口腔所見 : 口唇の紅潮, いちご舌, 口腔咽頭粘膜のびまん性発赤.
4. 不定形発疹.
5. 四肢末端の変化 : (急性期) 手足の硬性浮腫, 掌蹠ないしは指趾先端の紅斑.  
(回復期) 指先からの膜様落屑.

6. 急性期における非化膿性頸部リンパ節腫脹.

\* これら 6 つの主要症状のうち 5 つ以上の症状を伴うものを本症とする。

ただし、主要症状のうち 4 つの症状しか認められなくても場合によっては本症とする場合もある。

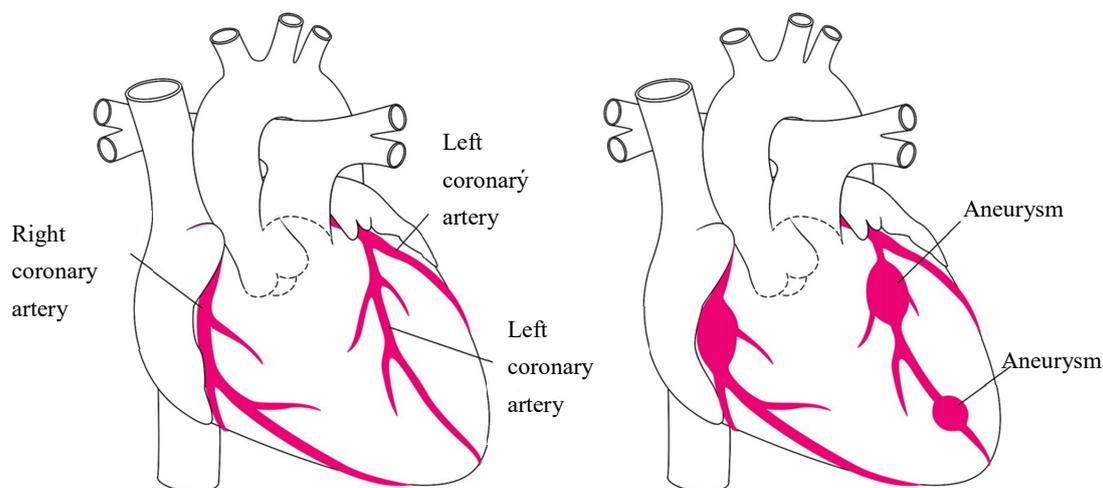
この病気は 1967 年に日本人の川崎富作医師が世界で初めて発表した<sup>[1-2]</sup>ため、この名前が付けられている。その後世界各地で報告されるようになったが、アジア特に日本での患者数が多い。1982 年と 1986 年に年間の患者数が約 1 万 5000 人という流行期があったのち、しばらくは年間 6000 人程度となっていたが、近年患者数が徐々に増加傾向にあり、2013 年と 14 年には前回の流行期である 82 年、86 年の患者数を上回った。

この病気の症状が現れる理由は、体内に細菌などの侵入があった場合に体を守る反応が強くなりすぎてしまい、白血球から出る酵素によって血管壁が傷んでしまう血管炎によるものであることが分かっている。しかし、そもそもなぜそのような反応が起きてしまうのか、何か引き金となるウイルスや細菌があるのかといった原因は、未だに明らかにされていない。

このような血管炎によって、心臓の冠状動脈（冠動脈 : Coronary Artery）に瘤（Aneurysms）が形成されてしまい、心筋梗塞の原因となる場合がある。また、瘤が形成され残らないまでも、川崎病による炎症によって傷ついた冠動脈

内壁が、数年～十数年経過したのち、患者本人が動脈硬化（Atherosclerosis）を発症する一般的な年齢に達していないにもかかわらず、20～30歳代で動脈硬化を発症する可能性<sup>[1-3]</sup>、<sup>[1-4]</sup>が指摘されている。

冠動脈は心臓の心筋に血液を送る重要な血管であり、この血管に障害があると心臓が機能を維持することができなくなるため、最悪の場合死に至ることがある。川崎病によって冠動脈がどのような損傷を受けたかを明らかにするためには、冠動脈内部の血流の状況を調べる必要がある。その方法としてまず考えられるのが、可視化実験や内部流速の計測実験などである。しかし、乳幼児の冠動脈径は1～2mmと非常に細く内部の可視化や計測は、それを実現するための高価な実験装置や熟練した計測技術を考えると容易ではなく、血管壁の粘弾性特性や形状に分岐を含んでいることなどを考えると、現象のメカニズムを解明することにつなげられない。さらに計測の不確かさを考慮すると、実験的に内部状態を把握するのは非常に困難であると言える。



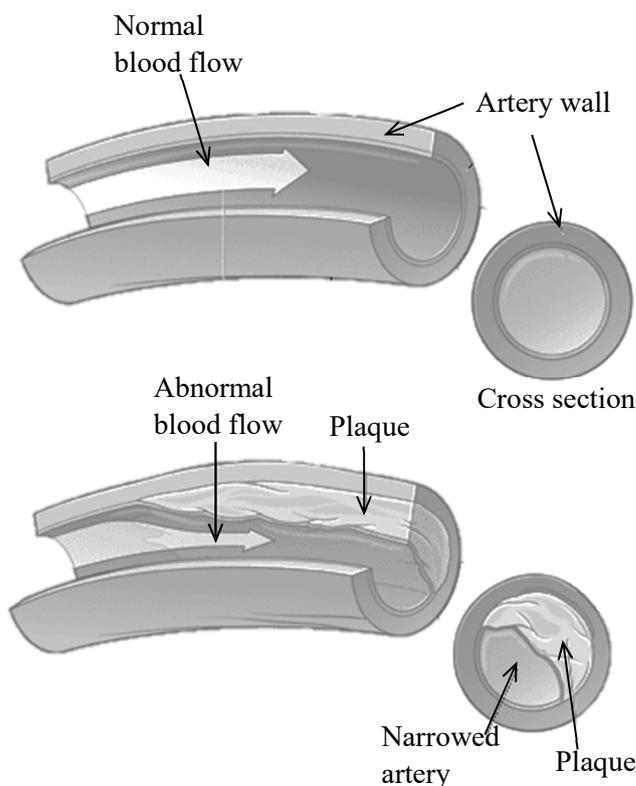
Source of reference: [1-5]

Fig.1-1 Comparison of heart with and without aneurysms.

これまで行われてきた臨床学的研究においても、内部の状況を探ろうとするものはあったが、冠動脈内部全体ではなく、あくまでも一部の指標（血管内の局所的な圧力や速度など）を把握したものに過ぎない。例えば、小川ら<sup>[1-6]</sup>はガイドワイヤー型ドップラー血流速度計にて計測を行い、川崎病による冠動脈の病

変部位の流速の変化について調査した。しかし、この方法で計測できるのは管断面内の中央部分の流速のみであるため、せん断応力値 (Shear stress) について病変の有無による有意差についての議論が十分であるか明らかではなく、また、冠動脈内全体の状況を把握することができないため、分岐や曲がり部のある冠動脈内の状況を把握するには不十分である。

川崎病発症時に冠動脈瘤が生じバイパスを形成する手術を受けた患者のうち、10~20年経過した後に突然死する例が散見されることが分かっている<sup>[1-7]</sup>。原因としては、成人後の過度の運動や精神的ストレス、過労により、冠血流の不足が生じた可能性が指摘されており、成人後も注意深い観察が必要と述べられている。このような課題についても、内部の流動状況が明らかになれば、冠動脈瘤発症時により適切な処置を実施することや、長時間経過後の様子を予測することが可能となる。またバイパスに用いる血管についても、大伏在静脈、内胸動脈、右胃大網動脈<sup>[1-8]</sup>など数種類が提唱されているが、最適なものを決定する条件は明らかにされていない。内部の流動状態が明らかになれば、最適なバイパス血管を決定する指標を得ることができる。



Source of reference: National Heart, Lung, and Blood Institute

Fig.1-2 Comparison arteries with and without atherosclerosis.

またグラフトを用いたバイパス手術に関して、冠動脈瘤が大きすぎる場合、実施しない方がよいかもしれない、という報告<sup>[1-9]</sup>はあるものの、内部の血流の流動状況は明らかにされていない。また、手術を行うタイミングについても、症状が出ている急性期には避けた方がよいが、症状が治まった後の遠隔期には、動脈瘤の形態によっては介入した方がよい場合があると示唆されている<sup>[1-10]</sup>。しかし、どの研究についても、手術実施の可否について明確な指標を示すことはできておらず、原因についても解明しようとする試みはなされていない。

以上で述べたように、乳幼児の冠動脈に関しては、実験による研究や臨床学的研究では困難さも大きく限界もあるため、内部の流動状態を明らかにするために有効であると考えられるのが、数値計算によるシミュレーションである。シミュレーションでは、実現象を再現できているかどうかの確認は常に必要ではあるものの、大掛かりな装置を必要とすることがないので、実験のような物理的制限を受けることなく流動状況の把握をすることができる。

さらに、近年のコンピュータ技術の向上により、複雑な流れ場について従来よりも詳細に解析することが可能となってきている。このことにより、これまで解明が困難であった複雑な流れ場についても、シミュレーションを用いることによって、詳細に明らかにすることができるようになりつつある。

そのため川崎病に関する研究でも数値計算を利用したシミュレーション研究が、過去何件かあった。しかし、本来は流体からの力を受けて変形することもある粘弾性や超弾性特性を持っている血管壁の物性を、流体からの力によって変形しない剛体として扱っているものがほとんどである<sup>[1-11], [1-12], [1-13], [1-14]</sup>。また冠動脈は心臓外壁上にあるため、心臓の拍動運動によって冠動脈自身も強制的に周期的な移動をさせられているが、その影響が考慮されておらず<sup>[1-11], [1-12], [1-13], [1-14]</sup>、冠動脈内部の流れ場について明らかにすることへつなげられるとは言えない状況である。

川崎病に罹患した冠動脈の機械的力学特性について、本来であれば身体的症状の現れている最中に計測を行うことが望ましいが、冠動脈の機械力学的特性は剖検後の冠動脈を内圧負荷試験などで計測する<sup>[1-15]</sup>ことが一般的であるため、川崎病に罹患した冠動脈の機械力学的特性の計測値は、今のところほとんどないと考えられる。非接触にて機械力学的特性を計測する方法についても、その計測対象は表面に存在していることが前提であるため、体内組織に応用することは現在までのところ困難である<sup>[1-16], [1-17]</sup>。

そこで本研究では、冠動脈の血管壁力学特性を粘弾性や超弾性として扱い、流れと管壁の運動についてその相互作用の影響を調べることに、さらに上記したような冠動脈が強制移動させられる影響についても考慮したシミュレーションを実施し、その影響について調べ、川崎病の症状が治まった後も残る冠動脈瘤や動脈硬化の影響を調べるためのベースを作ることを目的とした。

川崎病の特徴として、通常の動脈瘤と異なり、数日から十数日という非常に短期間に動脈瘤が巨大化するという特徴がある<sup>[1-18], [1-19]</sup>。本研究にて冠動脈の内部の状況を探るベースを作成することによって、その巨大動脈瘤の形成過程をシミュレーションし明らかにすることが可能となる。また、動脈硬化の原因としてせん断応力分布の偏りが指摘されている<sup>[1-20], [1-21], [1-22], [1-23]</sup>。本研究により冠動脈全体についてより正確なせん断応力分布を把握することが可能となる。

以下に本研究の概要を示す。

## 第2章 血管壁の粘弾性を考慮したアスペクト比の大きい円管内流れの数値計算

本研究では、上記のような特性を持つ冠動脈内部の流れを明らかにするため、粘弾性特性を与えるためのモデルとして、バネ（弾性）とダンパ（粘性）を並列に置いた単純なバネ-ダンパモデルを用いて血管壁の粘弾性特性を表し、流体から壁面が受ける力を考慮したシミュレーションをすることにより、壁面を変形しない剛体として仮定した場合と比較を行い、粘弾性を計算する必要性について示した。

### 第3章 冠状動脈をモデルとした壁面に超弾性特性のある円管内流れの数値解析

次に、バネーダンパモデルでは表せなかった複雑な血管壁の特性を表すため、より実際の冠動脈壁物性に近い超弾性特性を表す Mooney-Rivlin モデルを採用し、さらに流体から壁面が受ける力に加えて壁面から流体が受ける力を含めた流体と構造（血管壁）の相互作用を計算するため流体と構造を同時に解く計算モデルを採用することにより、これまで困難だった計算を可能とし、壁面が変形する様子を再現した。

### 第4章 冠動脈を模した超弾性特性のある分岐管内流れの数値解析

第3章にて適用した方法を、冠動脈の特徴である分岐を持つ円管に応用し、内部の流動状況とせん断応力分布を明らかにした。

### 第5章 拡大・収縮する球上に置かれた管内流れのシミュレーション

冠動脈は心臓に沿って位置することから心臓の拍動運動の影響を大きく受けていると考えられるため、時間的に拡大・収縮する球を用いて心臓の拍動運動をモデル化し、その球上に沿って置いた円管内の流れについてシミュレーションを行い、冠動脈内の流れが心臓の拍動から受ける影響について評価した。

## 参考文献

- [1-1] 日本循環器学会，日本川崎病学会，日本胸部外科学会，日本小児科学会，日本小児循環器学会，日本心臓病学会，川崎病心臓血管後遺症の診断と治療に関するガイドライン（2013年改訂版）
- [1-2] Tomisaku Kawasaki and Fumio Kousaki, Febrile Oculo-ore-cutaneo-acrodesquamatus Syndrome with or without Acute Non-suppurative Cervical Lymphadenitis in Infancy and Childhood: Clinical Observations of 50 Cases, *Allergy*, vol.16 (3) , (1967) , p. 178-222, 225
- [1-3] Brian W. McCrindle, Susan McIntyre, Christopher Kim, Tammy Lin, Khosrow Adeli, Are Patients after Kawasaki Disease at Increased Risk Accelerated Atherosclerosis?, *The Journal of Pediatrics*, (2007) , 151, p.244-248
- [1-4] 谷下一夫，動脈硬化に関するマイクロナノバイオメカニクス，*脈管学*，vol.46, (2006), p.735-741
- [1-5] Annete L. Baker and Jane W. Newburger, Kawasaki Disease, *Circulation*, vol.118 (7) , (2008) , p.110-112
- [1-6] 小川 俊一，落 雅美，冠動脈障害を有する川崎病既往者の冠循環動態および侵襲的治療前後の冠循環動態を考察する，*冠疾患誌*，vol.17, (2011), p.66-74
- [1-7] 須田 優司，竹内 靖夫，川崎病に対する冠動脈バイパス術-30年間の成績-，*東女医大誌*，vol.77 (4), (2007), p.167~170
- [1-8] 須田 優司，竹内 靖夫，成長期を過ぎ 15年経過した右胃大網動脈を用いた川崎病患児に対する冠動脈バイパス術の 2 症例，*東女医大誌*，vol.77 (5), (2007), p.270~273
- [1-9] Etsuko tsuda, Hideki Fujita, Toshikatsu Yagihara, Osamu Yamada, Shigeyuki Echigo, Soichiro Kitamura, Competition Between Native Flow and Graft Flow After Coronary Artery Bypass Grafting. Impact on Indications for Coronary Artery Bypass Grafting for Localized Stenosis with Giant Aneurysms Due to Kawasaki Disease, *Pediatric Cardiology*, vol.29, (2008) , p.266-270
- [1-10] 片平晋太郎，川本俊輔，神田桂輔，吉岡一朗，安達 理，細山勝寛，鈴木智之，藤原英記，秋山正年，正木直樹，河津 聡，熊谷紀一郎，齋木

- 佳克, 川崎病に対する冠状動脈バイパス術の問題点, 胸部外科, vol. (69), (2016), p. 331-336
- [1-11] Sandor I. Bernad, Elena S. Bernad, Marius Craina, Izabella Sargan, Alin Totoran, Cosmin Brisan, Particle Depositions and Related Hemodynamic Parameters in the Multiple Stenosed Right Coronary Artery, *Journal of Clinical Medicine Research*, vol.4 (3) , (2012) , p.177-189
- [1-12] Soulis JV, Fytanidis DK, Seralidou KV, Giannoglou GD, Wall shear stress oscillation and its gradient in the normal left coronary artery tree bifurcations, *Hippokratia*, Vol.18 (1) , (2014) , p.12-16
- [1-13] Dibyendu Sengupta, Andrew M. Kahn, Ethan Kung, Mahdi Esmaily Moghadam, Olga Shirinsky, Galina A. Lyskina, Jane C. Burns, Alison L. Marsden, Thrombotic risk stratification using computational modeling in patients with coronary artery aneurysms following Kawasaki disease, vol.13 (6) , (2014) , p.1261-1276
- [1-14] Ethan Kung, Andrew M. Kahn, Jane C. Burns, and Alison Marsden<sup>1</sup>, *In Vitro Validation of Patient-Specific Hemodynamic Simulations in Coronary Aneurysms Caused by Kawasaki Disease*, *Cardiovascular Engineering and Technology*, Vol.5 (2) , (2014) , p.189-2201
- [1-15] 杉田 修啓, 松本 健郎, 増田 弘毅, 佐藤 正明, 動脈硬化病変を有するヒト冠動脈の血管周方向ひずみ分布計測, 日本機械学会論文集(A 編), vol. (79), (2013), p.59-69
- [1-16] 志村 尚俊, 松本 良憲, 山本 武志, CCD カメラによる非接触計測技術の物性測定への応用, *TOSOH Research & Technology Review*, vol.54, (2010) , p.101-105
- [1-17] Enzo Berardesca, Howard I. Maibach, Klaus-Peter Wilhelm, *Non Invasive Diagnostic Techniques in Clinical Dermatology*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2014), p.3-26
- [1-18] 深澤 隆治, 巨大冠動脈瘤の遠隔期予後, 呼と循, vol.63 (1) , (2015) , p.33-37
- [1-19] 石井 正治, 川崎病, 医学のあゆみ, vol.263 (6) , (2017) , p.495-500
- [1-20] Caro CG, Fitz-Gerald JM, Schroter RC, Atheroma and arterial wall shear: Observation, correlation and proposal of a shear dependent mass transfer

- mechanism for atherogenesis, Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences, vol.177, (1971) , p.109-159
- [1-21] Fry DL, Acute vascular endothelial changes associated with increased blood velocity gradients, Circulation research, vol.22, (1968) , p.165-197
- [1-22] Gerhard A. Holzapfel, Gerhard Sommer, Christian T. Gasser, and Peter Regitnig, Determination of layer-specific mechanical properties of human coronary arteries with nonatherosclerotic intimal thickening and related constitutive modelling, American journal of Physiology Heart and Circulatory Physiology , vol.289, (2005), p.2048-2058
- [1-23] Akram M. Shaaban and André J. Duerinckx, Wall Shear Stress and Early Atherosclerosis, American Journal of Roentgenology, vol.174(6), (2000), p. 1657-1665

## 第2章

血管壁の粘弾性を考慮したアスペクト比の  
大きい円管内流れの数値計算

## 2-1. 緒言

近年、川崎病の患者数は増加傾向にある（1996年：100人→2006年：190人/0～4歳児 100,000人に対し）<sup>[2-1]</sup>。この病気の症状として、手や足先に浮腫が現れ、高熱が5日間以上続くこと、などが挙げられる。これらの症状は血管炎によるものである。しかし、この病気の原因自体はまだ解明されていない。最近では治療方法がある程度まで確立されてきている一方、まれではあるが、治癒後にも巨大な動脈瘤が心臓の冠状動脈（冠動脈）に残されることがある。この冠動脈瘤は手術によって縫縮されるものであるが、悪影響を残さないためにはどの程度まで縮めればいいのかということに対する明確な指標は存在しない。また、冠動脈瘤が残らなかった場合においても、冠動脈内壁は川崎病の血管炎による炎症で大きく傷ついているため、何年も経過した後、動脈硬化を引き起こす可能性があることも指摘されている。しかしながら、川崎病は1967年に世界で初めて公になった病気であり、長期間経過後の影響についてはまだ分かっていないことが多い。

大きく損傷を受けるのが小児の心臓の冠状動脈という非常に小さな領域であり、内部の血液の流動状態を明らかにすることは非常に困難である。このため、シミュレーションを用いることが冠動脈内の流れを把握するためには有効な手段である。よってこれまでも川崎病に関するシミュレーション研究はあったが、血管壁を剛体と仮定しているもの<sup>[2-2], [2-3], [2-4], [2-5]</sup>がほとんどであり、内部の状態を明らかにできているとは言えない。

そこで本研究では、川崎病に罹患した冠動脈内の流れのシミュレーションの第一段階として、壁面に粘弾性を持たせた長い円管内を数値的に解析することにより、血管壁に粘弾性を仮定する必要性の有無について明らかにすることを目的とした。

## 2-2. 支配方程式

流れは以下に示す無次元化した連続の式とナビエ・ストークス方程式に従う。

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2-2-1)$$

$$\frac{Wo^2}{Re} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\text{grad } p + \frac{1}{Re} (\Delta \mathbf{v}) \quad (2-2-2)$$

ここで,  $Wo = L\sqrt{f/\nu}$  ( $f$  [Hz]: 振動流の周波数,  $L$  [m]: 代表長さ,  $\nu$  [ $\text{m}^2/\text{s}$ ]: 動粘性係数): ウォーマースリー数<sup>[2-6]</sup>,  $Re = UL/\nu$  ( $U$  [m/s]: 代表速度): レイノルズ数,  $p$  [Pa]: 圧力,  $t$  [s]: 時間,  $v$  [m/s]: 流体の速度, とする。

2-1 でも述べたように, 本研究では管壁に粘弾性を仮定する必要性の有無を調べることを目的としているため, 管壁が流体から受ける力 (圧力) とそれによって変化する円管の半径との関係を表す必要がある。本研究では, 図 2-1 に示すように粘弾性特性を表すため, バネ (弾性) とダッシュポッド (粘性) を並行に置いた Voigt モデルを採用し, 以下に示す式 (2-2-3) にて, 流体運動から管壁が受ける力 (圧力) と円管半径とを関係づけた<sup>[2-7]</sup>。

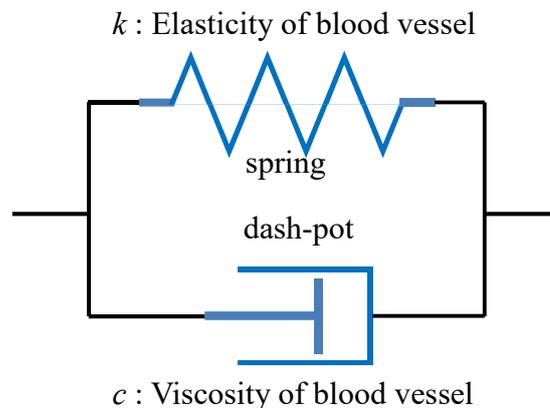


Fig. 2-1 Schematic of Voigt model.

$$p_{wall} = c \cdot \frac{\partial D(t)}{\partial t} + k \cdot D(t) \quad (2-2-3)$$

ここで,  $c$  [Pa·s]: 管壁の粘性,  $D$  [m]: 円管半径の変化,  $k$  [Pa/%]: 管壁の弾性,  $p_{wall}$  [Pa]: 管壁が受ける圧力, とする. (2-2-3) 式では左辺の第 1 項にてダッシュポッドの粘性を, 第 2 項にてバネ弾性を表しており, これらの力の合計と壁面が流体から受ける力の釣り合いを表している.

### 2-3. フラクショナルステップ法

本研究では 2-2. で示した支配方程式を，フラクショナルステップ法を用いて計算した．式 (2-2-2) から圧力に関する項を取り除いた式を考え，時間微分項を差分形式で表すと，

$$\frac{Wo^2}{Re} \frac{\mathbf{v}^* - \mathbf{v}}{\Delta t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{Re} (\Delta \mathbf{v}) \quad (2-3-1)$$

ここで  $\mathbf{v}^*$  は，実際の速度ベクトルに対する仮の速度ベクトルを表す．まず，式 (2-3-1) から仮の速度  $\mathbf{v}^*$  を以下のように求める．

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v} + \Delta t \frac{Re}{Wo^2} \left[ -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{Re} (\Delta \mathbf{v}) \right] \quad (2-3-2)$$

また，式 (2-2-2) と (2-3-1) の差を取ると以下のように圧力のポアソン方程式が得られる．

$$\Delta p = \frac{Wo^2}{Re} \frac{\nabla \cdot \mathbf{v}^*}{\Delta t} \quad (2-3-3)$$

この式は，次項で説明する SOR 法にて計算を行い，最新の時刻の圧力を得る．

よって新しい時刻の速度ベクトル  $\mathbf{v}^{n+1}$  は，

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n - \Delta t \frac{Re}{Wo^2} \nabla p^n \quad (2-3-4)$$

と求めることができる．

## 2-4. SOR 法

連立一次方程式を数値的に解く方法としては、直接法と反復法の 2 種類が挙げられる。このうち反復法には、係数行列の非零要素を格納する記憶領域があれば計算できる、反復回数に応じて近似解の精度が向上する<sup>[2-8]</sup>、という長所があり、本研究のような大規模疎行列を係数に持つ問題を扱うのに適している。式 (2-3-3) を差分形式で書くと、

$$\frac{p_{i+1,j,k} - 2p_{i,j,k} + p_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{p_{i,j+1,k} - 2p_{i,j,k} + p_{i,j-1,k}}{\Delta y^2} + \frac{p_{i,j,k+1} - 2p_{i,j,k} + p_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} = C \quad (2-4-1)$$

この式を書き直すと、 $p$  について以下の式を得る。

$$p_{i,j,k} = \frac{1}{\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} + \frac{2}{\Delta z^2}} \left( \frac{p_{i-1,j,k} + p_{i+1,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{p_{i,j-1,k} + p_{i,j+1,k}}{\Delta y^2} + \frac{p_{i,j,k-1} + p_{i,j,k+1}}{\Delta z^2} + C \right) \quad (2-4-2)$$

反復法では上記の計算を、前回の計算結果との差が収束するまで繰り返す。SOR 法では収束までを加速するために、緩和係数 $\omega$ を用いて前回の反復計算との差をとり、次の反復計算へ加える。

$$p_{i,j,k}^{(n+1)} = p_{i,j,k}^{(n)} + \omega \Delta p_{i,j,k}^{(n)} \quad (2-4-3)$$

$$\Delta p_{i,j,k}^{(n)} = p_{i,j,k}^{(n+1)} - p_{i,j,k}^{(n)}$$

$\omega$  は  $0 < \omega < 2$  の値を取る。

## 2-5. 計算領域

計算は、図 2-2 と 2-3 に示すような直管と 90° 曲がり管内について行った。

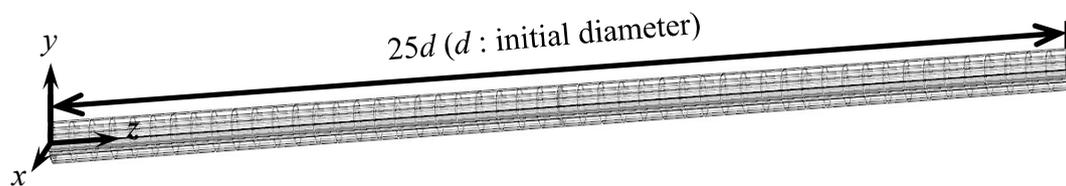


Fig.2-2 Calculation field of the straight pipe.

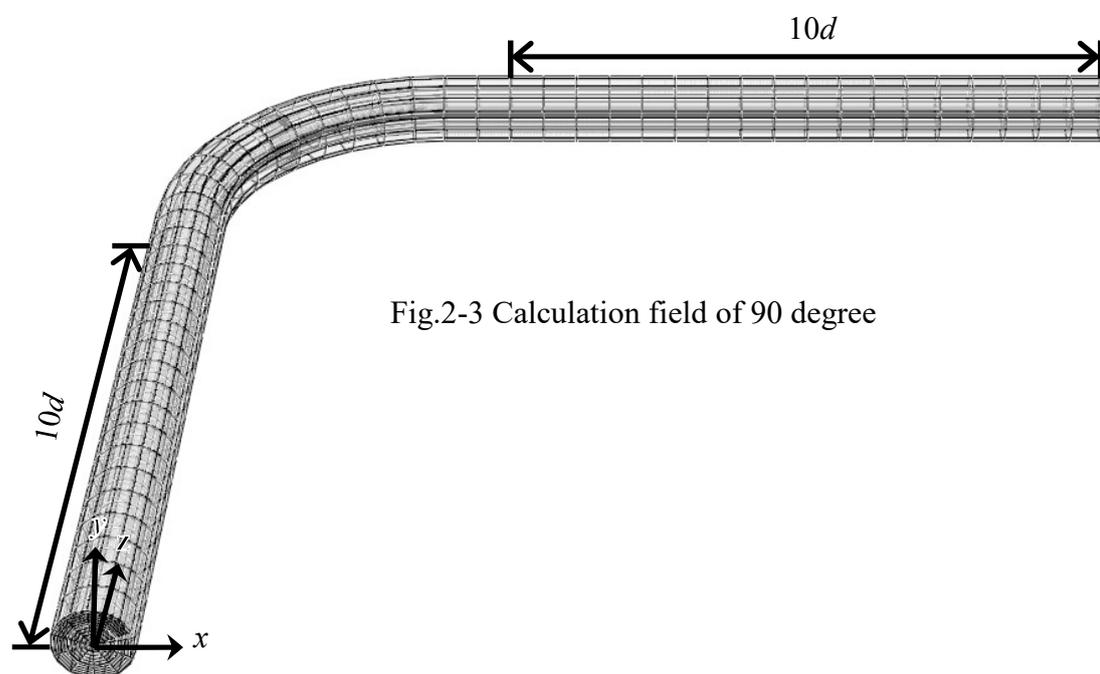


Fig.2-3 Calculation field of 90 degree

図中、 $d$  は変形前の円管の半径を表す。

## 2-6. 一般座標変換

単純な正方形で囲まれた領域ではなく，2-5 で示したような複雑な形状の計算領域上において計算を行うには，必要な方程式を一般座標変換する必要がある<sup>[2-9]</sup>。

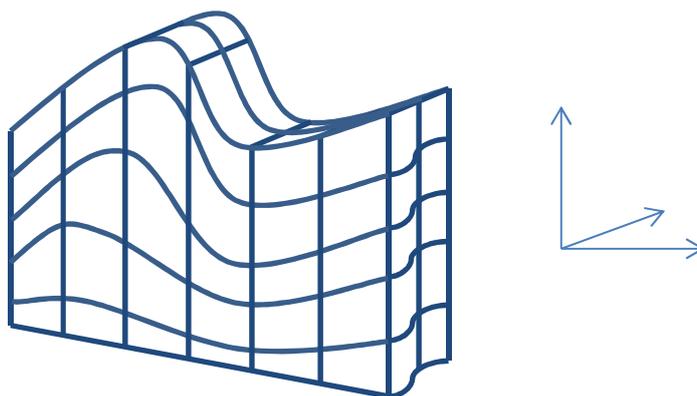


Fig. 2-4 Example of physical coordination.

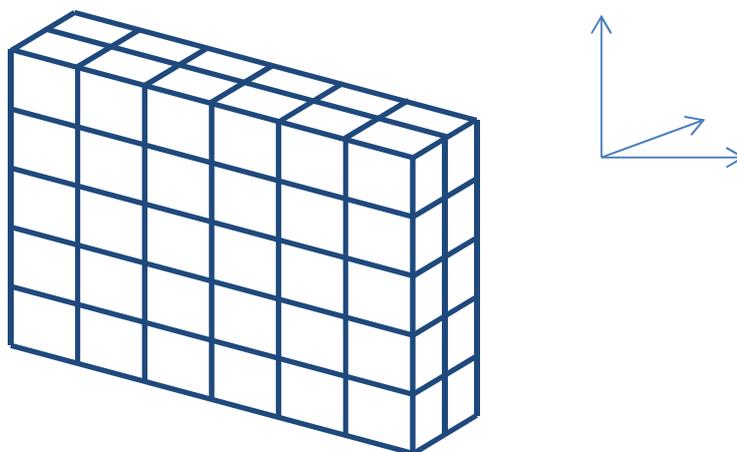


Fig.2-5 Orthogonal coordination.

例えば，図 2-4 に示したような複雑な 3 次元形状の計算領域について，そのままの状態では計算するのは非常に困難である．そこで計算領域を図 2-5 に示したような直方体領域に座標変換することにより，計算しやすくすることが可能である．

3次元の一般座標変換は,

$$\left. \begin{aligned} x &= x(\xi, \eta, \zeta) \\ y &= y(\xi, \eta, \zeta) \\ z &= z(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \right\} \quad (2-6-1)$$

と表すことができる. 図 2-4, 2-5 に示したように,  $(x, y, z)$  が実際の物理空間であり,  $(\xi, \eta, \zeta)$  が直交格子で囲まれた計算空間である. 支配方程式(2-2-1) ~ (2-2-3)は物理空間で考えられており, これらを計算空間上で表す必要がある. 支配方程式中の一階空間微分は, 以下のように表される.

$$\left. \begin{aligned} f_x &= \xi_x f_\xi + \eta_x f_\eta + \zeta_x f_\zeta \\ f_y &= \xi_y f_\xi + \eta_y f_\eta + \zeta_y f_\zeta \\ f_z &= \xi_z f_\xi + \eta_z f_\eta + \zeta_z f_\zeta \end{aligned} \right\} \quad (2-6-2)$$

これら式中の  $f_\xi, f_\eta, f_\zeta$  にかかる  $\xi_x$  から  $\zeta_z$  までの係数を求める必要がある. そのために上式と逆の変換を考える.

$$\left. \begin{aligned} f_\xi &= x_\xi f_x + y_\xi f_y + z_\xi f_z \\ f_\eta &= x_\eta f_x + y_\eta f_y + z_\eta f_z \\ f_\zeta &= x_\zeta f_x + y_\zeta f_y + z_\zeta f_z \end{aligned} \right\} \quad (2-6-3)$$

まず (2-6-2) を以下のように表現する.

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \eta_x & \zeta_x \\ \xi_y & \eta_y & \zeta_y \\ \xi_z & \eta_z & \zeta_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_\xi \\ f_\eta \\ f_\zeta \end{bmatrix} \quad (2-6-4)$$

同様に (2-6-3) も以下のように表す。

$$\begin{bmatrix} f_\xi \\ f_\eta \\ f_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & y_\xi & z_\xi \\ x_\eta & y_\eta & z_\eta \\ x_\zeta & y_\zeta & z_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \quad (2-6-5)$$

(2-6-4) と (2-6-5) から

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & y_\xi & z_\xi \\ x_\eta & y_\eta & z_\eta \\ x_\zeta & y_\zeta & z_\zeta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_\xi \\ f_\eta \\ f_\zeta \end{bmatrix} \quad (2-6-6)$$

したがって、

$$\begin{bmatrix} \xi_x & \eta_x & \zeta_x \\ \xi_y & \eta_y & \zeta_y \\ \xi_z & \eta_z & \zeta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & y_\xi & z_\xi \\ x_\eta & y_\eta & z_\eta \\ x_\zeta & y_\zeta & z_\zeta \end{bmatrix}^{-1} \quad (2-6-7)$$

となり、左辺の行列成分、つまり式 (2-6-4) 中の係数を求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} \xi_x &= \begin{vmatrix} y_\eta & z_\eta \\ y_\zeta & z_\zeta \end{vmatrix} / J = (y_\eta z_\zeta - z_\eta y_\zeta) / J \\ \eta_x &= - \begin{vmatrix} y_\xi & z_\xi \\ y_\zeta & z_\zeta \end{vmatrix} / J = -(y_\xi z_\zeta - z_\xi y_\zeta) / J \\ \zeta_x &= \begin{vmatrix} y_\xi & z_\xi \\ y_\eta & z_\eta \end{vmatrix} / J = (y_\xi z_\eta - z_\xi y_\eta) / J \\ \xi_y &= - \begin{vmatrix} x_\eta & z_\eta \\ x_\zeta & z_\zeta \end{vmatrix} / J = -(x_\eta z_\zeta - z_\eta x_\zeta) / J \\ \eta_y &= \begin{vmatrix} x_\xi & z_\xi \\ x_\zeta & z_\zeta \end{vmatrix} / J = (x_\xi z_\zeta - z_\xi x_\zeta) / J \end{aligned} \right\} \quad (2-6-8)$$

$$\left. \begin{aligned}
\zeta_y &= - \begin{vmatrix} x_\xi & z_\xi \\ x_\eta & z_\eta \end{vmatrix} / J = -(x_\xi z_\eta - z_\xi x_\eta) / J \\
\xi_z &= \begin{vmatrix} x_\eta & y_\eta \\ x_\zeta & y_\zeta \end{vmatrix} / J = (x_\eta y_\zeta - y_\eta x_\zeta) / J \\
\eta_z &= - \begin{vmatrix} x_\xi & y_\xi \\ x_\zeta & y_\zeta \end{vmatrix} / J = -(x_\xi y_\zeta - y_\xi x_\zeta) / J \\
\zeta_z &= \begin{vmatrix} x_\xi & y_\xi \\ x_\eta & y_\eta \end{vmatrix} / J = (x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta) / J
\end{aligned} \right\}$$

ただし  $J$  は変換のヤコビアンであり,

$$\begin{aligned}
J &= \begin{vmatrix} x_\xi & y_\xi & z_\xi \\ x_\eta & y_\eta & z_\eta \\ x_\zeta & y_\zeta & z_\zeta \end{vmatrix} = x_\xi y_\eta z_\zeta + x_\eta y_\zeta z_\xi + x_\zeta y_\xi z_\eta \\
&\quad - x_\zeta y_\eta z_\xi - x_\eta y_\xi z_\zeta - x_\xi y_\zeta z_\eta
\end{aligned} \quad (2-6-9)$$

で求められる.

次に, ナヴィエ・ストークス方程式中には二階空間微分項も含まれるため, これまでの一階空間微分を参考に次のように計算して表す.

$$\begin{aligned}
f_{xx} &= (f_x)_x \\
&= \xi_x (f_x)_\xi + \eta_x (f_x)_\eta + \zeta_x (f_x)_\zeta \\
&= \xi_x (\xi_x f_\xi + \eta_x f_\eta + \zeta_x f_\zeta)_\xi + \eta_x (\xi_x f_\xi + \eta_x f_\eta + \zeta_x f_\zeta)_\eta \\
&\quad + \zeta_x (\xi_x f_\xi + \eta_x f_\eta + \zeta_x f_\zeta)_\zeta \\
&= \xi_x^2 f_{\xi\xi} + \xi_x (\xi_x)_\xi f_\xi + \xi_x \eta_x f_{\xi\eta} + \xi_x (\eta_x)_\xi f_\eta + \xi_x \zeta_x f_{\xi\zeta} + \xi_x (\zeta_x)_\xi f_\zeta \\
&\quad + \eta_x \xi_x f_{\xi\eta} + \eta_x (\xi_x)_\eta f_\xi + \eta_x^2 f_{\eta\eta} + \eta_x (\eta_x)_\eta f_\eta + \eta_x \zeta_x f_{\eta\zeta} + \eta_x (\zeta_x)_\eta f_\zeta \\
&\quad + \zeta_x \xi_x f_{\xi\zeta} + \zeta_x (\xi_x)_\zeta f_\xi + \zeta_x \eta_x f_{\eta\zeta} + \zeta_x (\eta_x)_\zeta f_\eta + \zeta_x^2 f_{\zeta\zeta} + \zeta_x (\zeta_x)_\zeta f_\zeta
\end{aligned} \quad (2-6-10)$$

$y, z$  方向についても同様に計算すると,  $f$  についてのラプラシアン  $\nabla^2$  は以下の  
ように表すことができる.

$$\nabla^2 = c_1 f_{\xi\xi} + c_2 f_{\eta\eta} + c_3 f_{\zeta\zeta} + c_4 f_{\xi\eta} + c_5 f_{\eta\zeta} + c_6 f_{\zeta\xi} + c_7 f_{\xi} + c_8 f_{\eta} + c_9 f_{\zeta} \quad (2-6-11)$$

ここで,

$$\left[ \begin{array}{l} c_1 = \xi_X^2 + \xi_Y^2 + \xi_Z^2 \\ c_2 = \eta_X^2 + \eta_Y^2 + \eta_Z^2 \\ c_3 = \zeta_X^2 + \zeta_Y^2 + \zeta_Z^2 \\ c_4 = 2(\xi_X \eta_X + \xi_Y \eta_Y + \xi_Z \eta_Z) \\ c_5 = 2(\eta_X \zeta_X + \eta_Y \zeta_Y + \eta_Z \zeta_Z) \\ c_6 = 2(\zeta_X \xi_X + \zeta_Y \xi_Y + \zeta_Z \xi_Z) \\ c_7 = \xi_x (\xi_x)_\xi + \eta_x (\xi_x)_\eta + \zeta_x (\xi_x)_\zeta + \xi_y (\xi_y)_\xi + \eta_y (\xi_y)_\eta + \zeta_y (\xi_y)_\zeta \\ \quad + \xi_z (\xi_z)_\xi + \eta_z (\xi_z)_\eta + \zeta_z (\xi_z)_\zeta \\ c_8 = \xi_x (\eta_x)_\xi + \eta_x (\eta_x)_\eta + \zeta_x (\eta_x)_\zeta + \xi_y (\eta_y)_\xi + \eta_y (\eta_y)_\eta + \zeta_y (\eta_y)_\zeta \\ \quad + \xi_z (\eta_z)_\xi + \eta_z (\eta_z)_\eta + \zeta_z (\eta_z)_\zeta \\ c_9 = \xi_x (\zeta_x)_\xi + \eta_x (\zeta_x)_\eta + \zeta_x (\zeta_x)_\zeta + \xi_y (\zeta_y)_\xi + \eta_y (\zeta_y)_\eta + \zeta_y (\zeta_y)_\zeta \\ \quad + \xi_z (\zeta_z)_\xi + \eta_z (\zeta_z)_\eta + \zeta_z (\zeta_z)_\zeta \end{array} \right.$$

と表される.

## 2-7. 時間を含んだ一般座標変換

格子が時間的に変化する場合、以下のような座標変換を行うことによって、時間的に変化しない領域で計算することができる<sup>[2-9]</sup>.

空間 3 次元と時間を含めた一般座標変換は、

$$\left. \begin{aligned} x &= x(\xi, \eta, \zeta, \tau) \\ y &= y(\xi, \eta, \zeta, \tau) \\ z &= z(\xi, \eta, \zeta, \tau) \\ t &= \tau \end{aligned} \right\} \quad (2-7-1)$$

座標変換に伴う微分係数は、時間微分を含まない部分に関しては 2-6. と同じものを用いることができる。

時間微分を含む項には、

$$\left( \frac{\partial f}{\partial \tau} \right)_{\xi, \eta, \zeta} = \left( \frac{\partial x}{\partial \tau} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial y}{\partial \tau} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial z}{\partial \tau} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial x}{\partial \tau} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial t}{\partial \tau} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) \quad (2-7-2)$$

ここで  $t = \tau$  より、

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) &= \left( \frac{\partial f}{\partial \tau} \right) - \left( \frac{\partial x}{\partial \tau} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \left( \frac{\partial y}{\partial \tau} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \left( \frac{\partial z}{\partial \tau} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial \tau} \right) - \left( \frac{\partial x}{\partial \tau} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right) - \left( \frac{\partial y}{\partial \tau} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right) \\ &\quad - \left( \frac{\partial z}{\partial \tau} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right) \end{aligned} \quad (2-7-3)$$

ナビエ・ストークス方程式中の時間項は上記の1階微分項のみなので，上記の式 (2-7-3) を用いることにより，流体の運動と共に時間的に変化する格子について計算することが可能となる．この式を式 (2-2-2) に適用し計算を行っていく．

## 2-8. 計算条件

計算領域入口からは，単純なサイン波と，図 2-6 に示したような実際の冠状動脈入口速度<sup>[2-2]</sup>による波の 2 種類を与えて計算を行った．また，圧力は入口について流れに垂直な方向の勾配を 0 とした．

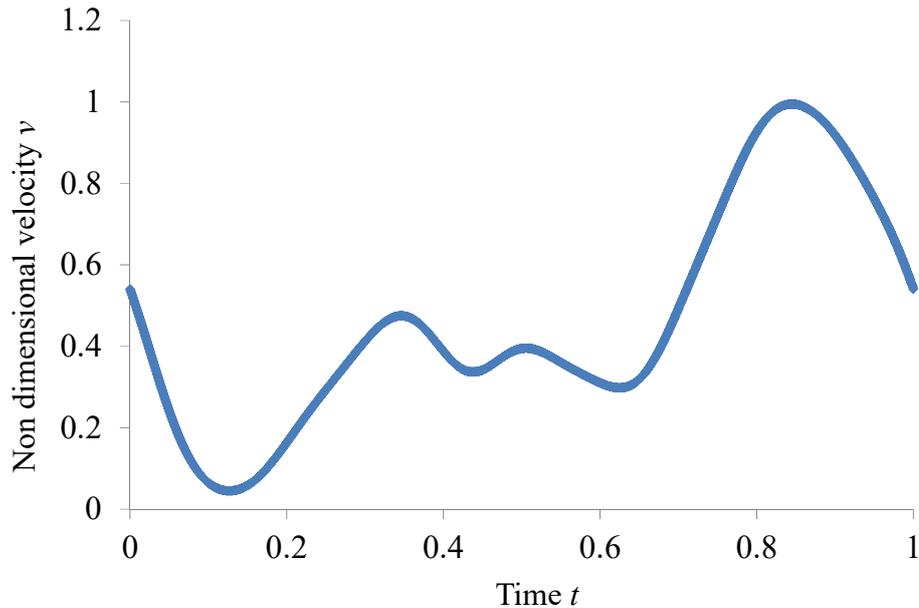


Fig.2-6 Time history of velocity pattern at the inlet of the coronary.

出口条件は，速度を自由流出流れ（出口垂直方向の勾配=0），圧力を 0 とした．管壁においては，速度はすべりなし条件（速度=0），壁に垂直方向の圧力勾配を 0 とした．

3 次元管内計算を実施する際には管断面中心（円の中心）も境界となり，条件を設定する必要がある．今回は管軸に垂直方向の速度勾配，圧力勾配共に 0 とした．

流体（血液）と血管壁に関する物性値は，動粘性係数  $\nu = 3.3 \times 10^{-6} [\text{m}^2/\text{s}]$ ，式 (2-2-3) 中の  $c = 2.7 \times 10^3 [\text{Pa} \cdot \text{s}]$ ， $k = 6.7 \times 10^2 [\text{Pa}/\%]$  とそれぞれ仮定した．

血管径が細くなると血液の粘性が流れに及ぼす影響が大きくなり，せん断応力と速度勾配の関係が非線形となりより複雑な仮定を用いなければならない，非ニュートン流体として扱う必要がある．本研究で扱う乳幼児の心臓冠動脈の

血管径は 1~2mm と細いものであるが，Johnston ら<sup>[2-10]</sup>によると，冠動脈内を流れる血流にニュートン流体，非ニュートン流体の両方のモデルを仮定しシミュレーションしても流れの状態に違いがないということが分かっている．よって本研究では冠動脈内の流体をニュートン流体とする．

## 2-9. 計算結果

### 2-9-1. 直管内のサイン波

最初に、図 2-2 に示した直管に単純なサイン波を流入させた。流れの条件はレイノルズ数  $Re = 70$ ，ウォーマースリー数  $Wo = 10$  とした。この時，流れによる力を受けて管径が変化する場合（式 (2-2-3) を導入）としない場合において比較を行った。

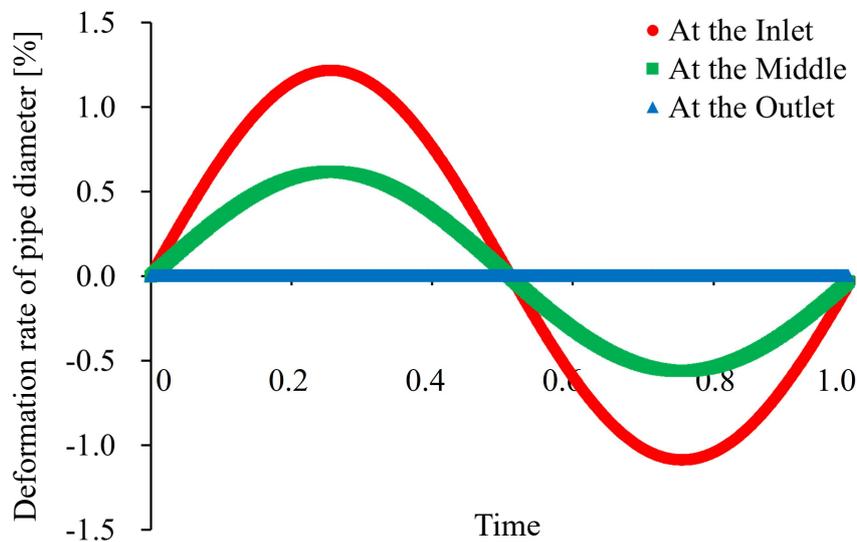


Fig.2-7 The comparison of deformation rate of pipe diameter with the position in the case of straight pipe.

図 2-7 に，直管内にサイン波を流入させた場合の管径の変化率を示す。これにより，管壁に粘弾性を与えると流れによる力を受け，入口付近で最大±1%程度管径が変化することが分かる。

図 2-8 にせん断応力値を，管径が変化する場合と変化しない場合にて比較した結果を示す。せん断応力値は，流れの主流方向の壁面に沿って，サイン波 1 周期の時間平均値を算出した。この結果より，入口付近を除き，全長に渡って管径が時間的に変化させた場合とさせない場合では 1%程度のせん断応力値の違いがあることが分かった。

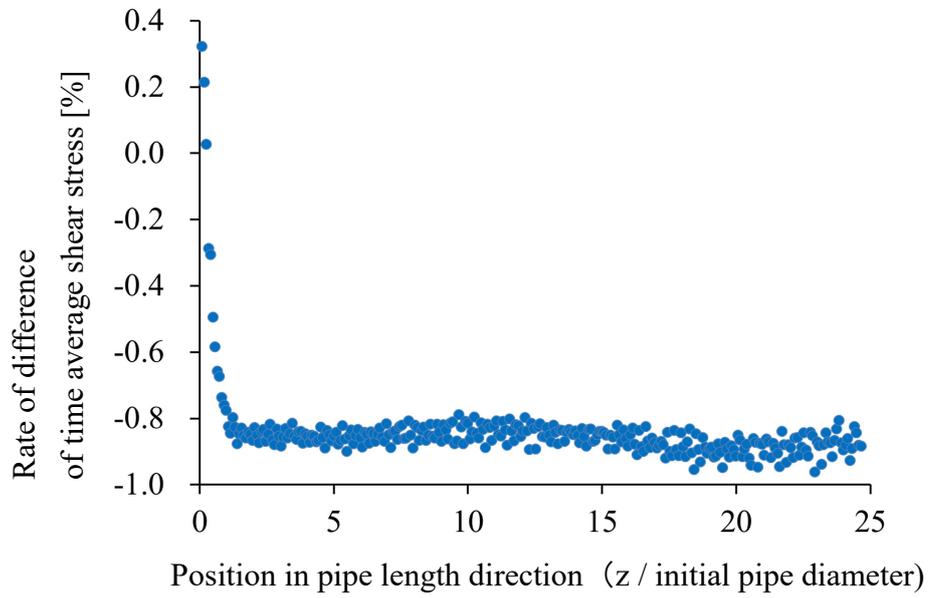


Fig. 2-8 The difference of time average shear stress in  $z$  direction between with and without viscoelasticity.

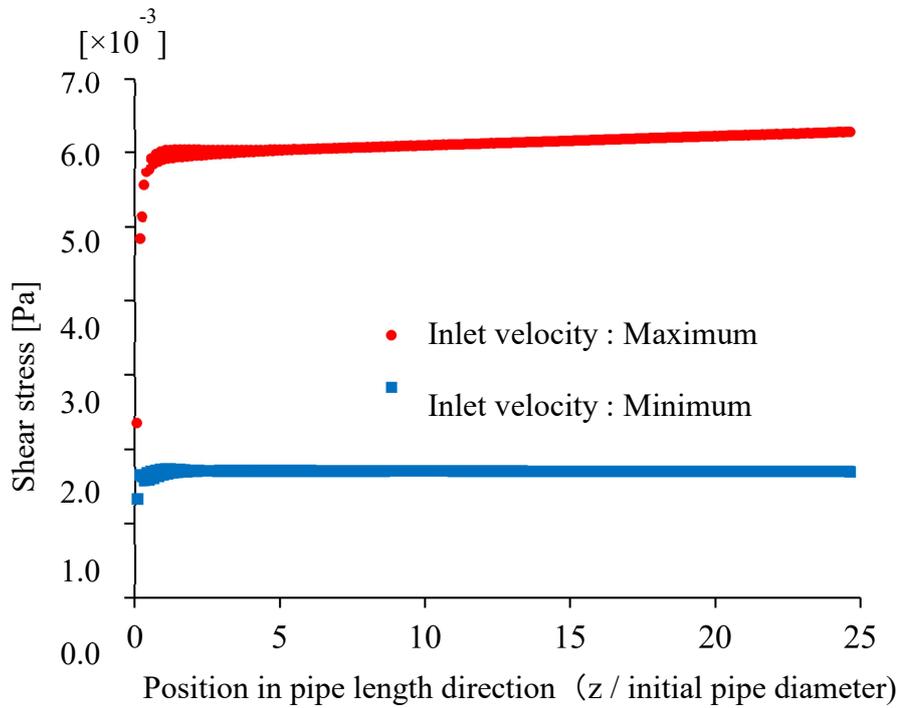


Fig. 2-9 Shear stress in  $z$  direction at the different time.

図 2-9 に管壁に粘弾性を持たせ管径が流れから受ける力によって変化する場合のせん断応力値を，入口速度が最大と最小の場合について示した．入口速度が最大の場合，最小の場合と比べ，せん断応力値が約 3 倍高い．また下流に行くにしたがって値がわずかに上昇している．

## 2-9-2. 90° 曲がり管内流れ

前項にて式 (2-2-3) の影響がわずかではあるが確認できたので、次に実際の血管を模擬した 90° 曲がり管内 (図 2-3) に、実際の冠動脈の入口速度波形 (図 2-4) を流入させた。

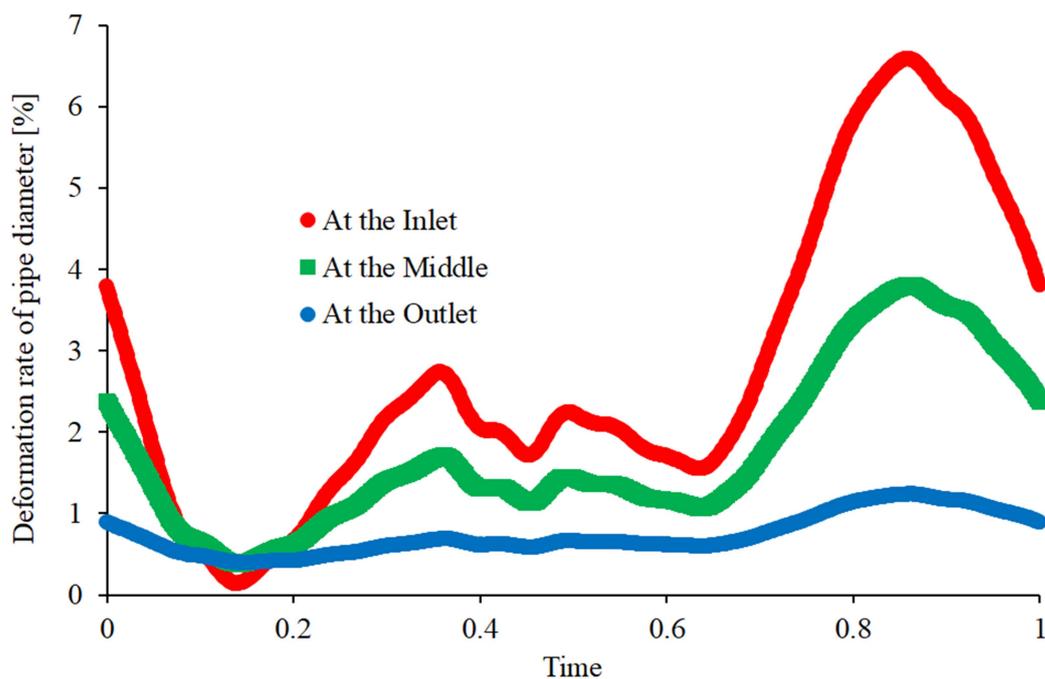
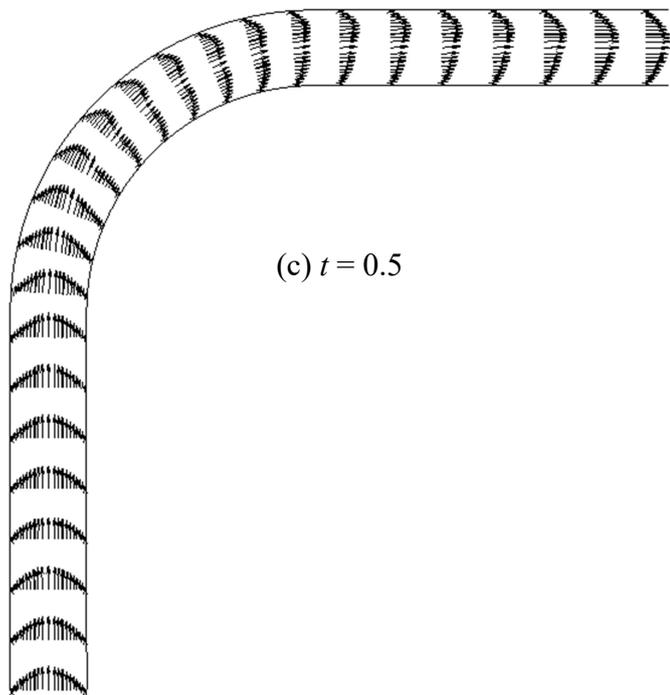
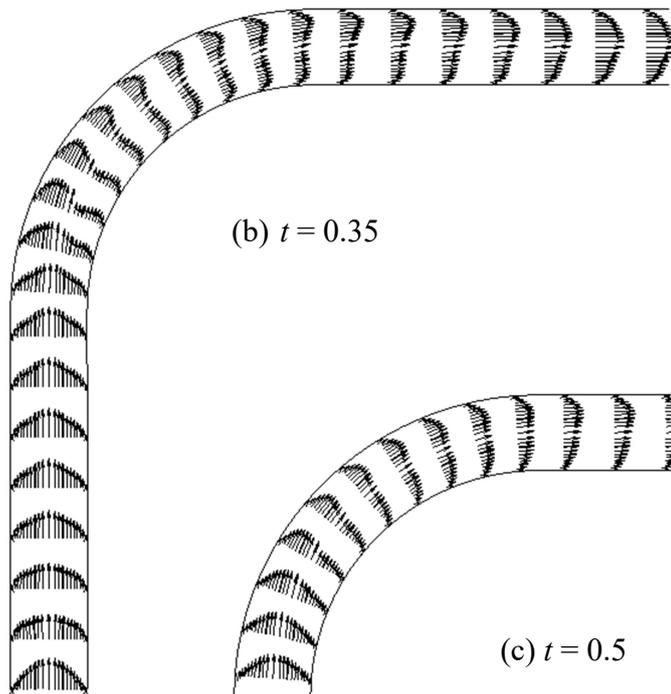
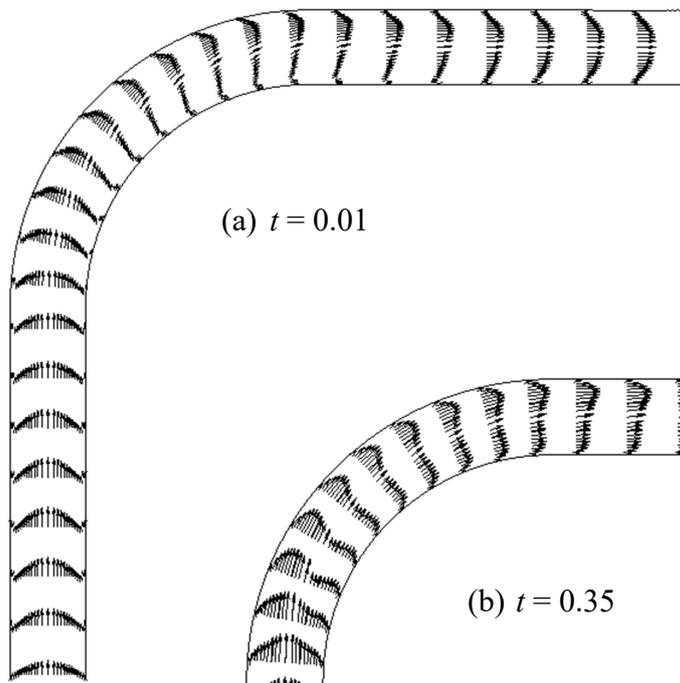


Fig. 2-10 The comparison of deformation rate of 90 degree bending pipe with the position.

図 2-10 に管径の元の大きさからの変化率の時間的変化を示す。これにより、入口付近では最大 7%程度、元の管径から変化することが分かる。よって流れから受ける力によって管径の変化は無視できるものではない。



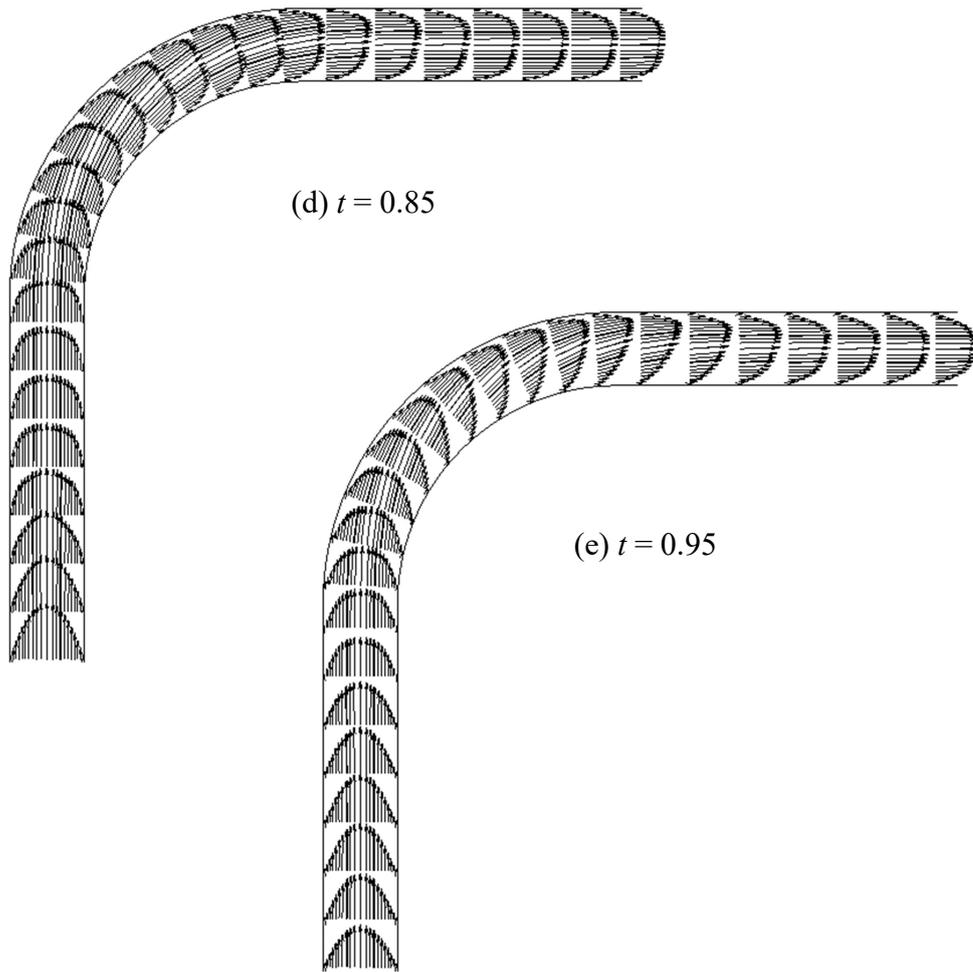
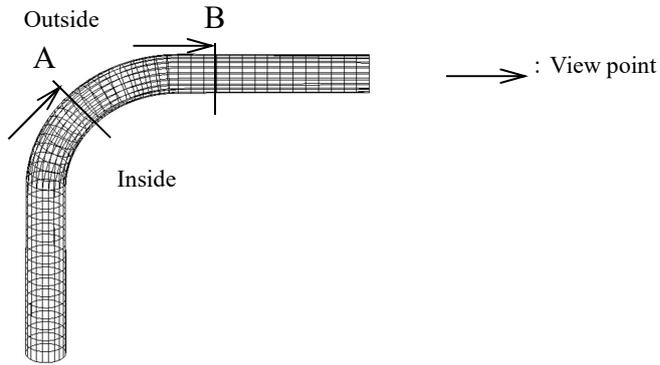


Fig.2-11 Velocity vectors in the 90 degree bended pipe.

図 2-11 に時刻 0.01, 0.35, 0.5, 0.85, 0.95 での速度ベクトルの結果を示す。入口流速が比較的小さい時刻 0.35 と 0.5 では、曲がり部での速度ベクトルは曲がり部外側に向かって偏っており、かつ速度が局所的に大きい部分が 2 か所ある。つまり速度ベクトルに 2 つの山が存在している。それに対し、時刻 0.85 と 0.95 の入口速度が大きい時刻では、曲がり部では全体的に外側に向かって速度が偏っている。特に入口流速が減少途中にある時刻 0.95 では、偏りが大きくなっている。

次にこれらの時刻での管断面内の速度ベクトルを調べる。

Table 2-1 Velocity vectors in cross sectional area.



	$t = 0.35$		$t = 0.85$	
Position A	Outside	Inside	Outside	Inside
Position B				

表 2-1 に管断面内の速度ベクトルを時刻 0.35 と 0.85 について示した。断面の位置は管長に対して 1/2 の位置（曲がり部中心）：位置 A と，出口から管長の 1/4 の位置：位置 B である。どちらの位置でも，入口流速の大きい時刻 0.85 において断面内の速度も大きくなっている。また中心を挟んで上下に対称的な渦も発生していることが分かる。図 2-11 の管長方向の速度ベクトルにおいても曲がり部外側に向かって速度分布が偏っており，断面内速度分布においても速度ベクトルが外側に向かっていていることが確認できる。これは曲がり部において内側から外側に向かって遠心力が働くため，このような速度分布の偏りが生じるものである。

位置 A と B の速度ベクトル図を比較すると，時刻 0.85 においての渦の発生状況が異なっていることが分かる。位置 A では断面内の比較的外側に渦が生じているのに対し，位置 B では断面内の中心に近い位置に渦が存在していることが分かる。

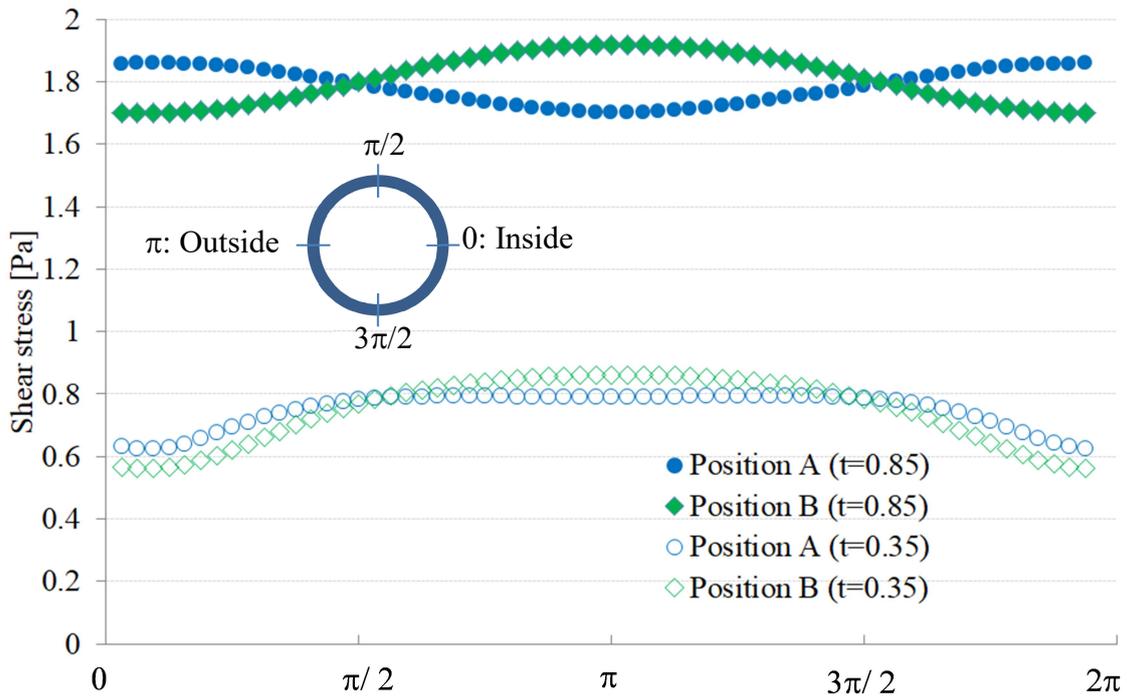


Fig.2-12 Shear stress distribution in cross sectional area at Position A and B ( $t = 0.35, 0.85$ ) .

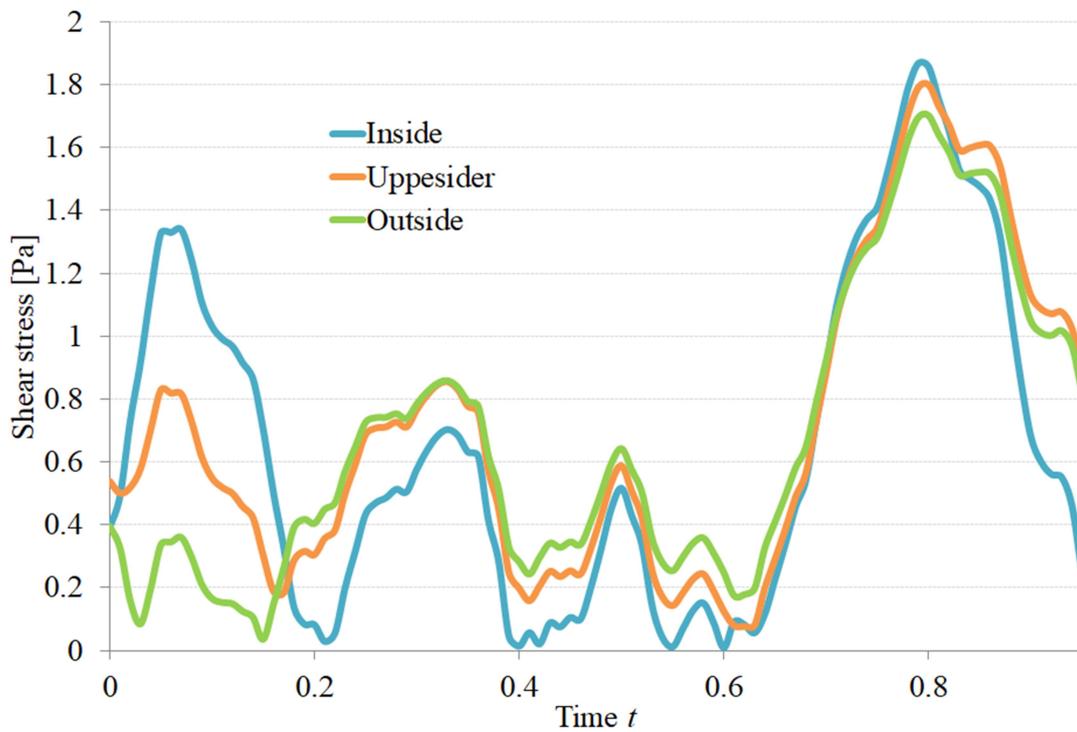


Fig.2-13 Comparison of temporal variation of shear stress with position in flow direction (at the center of bending part) .

図 2-12 に位置 A と B での断面内のせん断応力分布を示す。時刻は速度ベクトル図と同じく 0.35 と 0.85 において比較を行った。どちらの位置でも入口流速の大きい時刻 0.85 でせん断応力も大きくなっている。また時刻 0.85 での位置 A と B の分布を比較すると、位置 A では曲がり部内側の方が外側よりもせん断応力が高くなっているのに対し、位置 B では逆に管曲がり方向に対して外側の壁でせん断応力が高くなっており、分布の位相が正反対になっていることが分かる。逆に入口流速の小さい時刻 0.35 では位置 A, B のどちらの場合においても、管曲がり方向に対して外側の壁の方のせん断応力が高くなっている。

図 2-13 に曲がり部中心における管断面内せん断応力の時間的変化を示した。断面内の位置は管曲がり方向に対して、内側、外側とそれらの間の管最上部である。1 周期内での全体的な傾向はどの位置でも同じであるが、入口流速の比較的小さい周期の初めにおいては、せん断応力値に明確な違いが生じ、管曲がり方向に対して内側の位置において最も大きく、次いで管最上部、最も小さいのが外側の位置である。図 2-11(a)の時刻 0.01 での速度ベクトル図では、管曲がり部内側と外側では速度勾配が大きく異なっていることが分かり、このことが図 2-13 の周期前半のせん断応力値が大きく異なっていることの原因と考えられる。

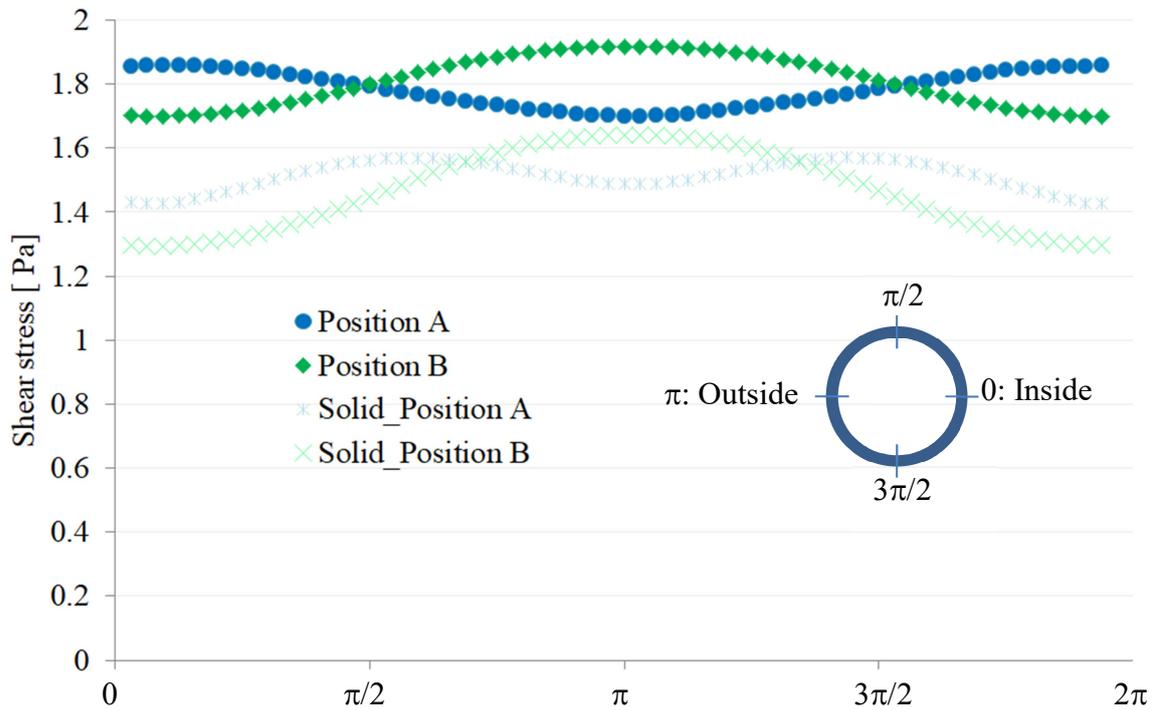


Fig. 2-14 Shear stress in the case of the wall with solid and viscoelastic at position of A and B ( $t = 0.85$ ).

図 2-14 に、断面内の力学特性を固体と仮定した場合と粘弾性とした場合のせん断応力値の比較を示す。せん断応力比較した位置は先ほどまでと同じ位置 A と B である。この結果から、固体と仮定した場合、粘弾性とした場合に比べてせん断応力値が 20%ほど低くなることが分かった。式 (2-2-3) の値は式 (2-2-2) の右辺の値となるため、固体と仮定した場合の方が粘弾性とした場合よりも式 (2-2-2) の右辺の値が大きくなり、壁面における速度勾配が小さくなったものと考えられる。

## 2-10. 結論

冠動脈を模擬した曲がり管の管壁にバネ-ダンパモデルで表される粘弾性を与え、内部流れについてシミュレーションを行い、以下の結論を得た。

- (1) 流体からの力を受けて、管径が変化することを明らかにできた。管径は最大で約 7% 変化することが分かった。
- (2) 管曲がり部では速度が管曲がり方向の外側に向かって偏っていることが分かった。
- (3) 管断面内速度ベクトルとせん断応力分布から、内部の状況を把握した。入口速度が最大となる時刻では、管曲がり部内側と外側においてせん断応力分布が全く異なっていることが分かった。
- (4) 粘弾性を仮定すると剛体とした場合と比べて、約 20% せん断応力値が異なることが分かった。

## 参考文献

- [2-1] 石井正治, 五十嵐隆, 川崎病のすべて (小児科臨床ピクシス), 中山書店, (2015)
- [2-2] Sandor I. Bernad, Elena S. Bernad, Marius Craina, Izabella Sargan, Alin Totoran, Cosmin Brisan, Particle Depositions and Related Hemodynamic Parameters in the Multiple Stenosed Right Coronary Artery, *Journal of Clinical Medicine Research*, vol.4 (3) , (2012) , p.177-189
- [2-3] Soulis JV, Fytanidis DK, Seralidou KV, Giannoglou GD, Wall shear stress oscillation and its gradient in the normal left coronary artery tree bifurcations, *Hippokratia*, Vol.18 (1) , (2014) , p.12-16
- [2-4] Dibyendu Sengupta, Andrew M. Kahn, Ethan Kung, Mahdi Esmaily Moghadam, Olga Shirinsky, Galina A. Lyskina, Jane C. Burns, Alison L. Marsden, Thrombotic risk stratification using computational modeling in patients with coronary artery aneurysms following Kawasaki disease, vol.13 (6) , (2014) , p.1261-1276
- [2-5] Ethan Kung, Andrew M. Kahn, Jane C. Burns, and Alison Marsden<sup>1</sup>, *In Vitro* Validation of Patient-Specific Hemodynamic Simulations in Coronary Aneurysms Caused by Kawasaki Disease, *Cardiovascular Engineering and Technology*, Vol.5 (2) , (2014) , p.189-2201
- [2-6] J. R. Womersley, METHOD FOR THE CALCULATION OF VELOCITY, RATE OF FLOW AND VISCOUS DRAG IN ARTERIES WHEN THE PRESSURE GRADIENT IS KNOWN, *the Journal of Physiology*, vol.127, (1955) , p.553-563
- [2-7] Akinobu Kohno, Abdugheni Kutluk, Toshio Tsuji, Teiji Ukawa, Ryuji Nakamura, Noboru Saeki, Masao Yoshizumi and Masashi Kawamoto, Quantitative Evaluation of Pain with Mechanical Nociceptive Stimuli by the Change of Arterial Wall Viscoelasticity, *the Japanese journal of medical instrumentation*, vol.80 (3) , (2010) , p. 196-204
- [2-8] 杉原正顯, 室田一雄, 線形計算の数理, 岩波書店, (2009) , p.63-86
- [2-9] 数値流体力学編集委員会編, 非圧縮性流体解析: 数値流体力学シリーズ 1, 東京大学出版会, (1999)

[2-10] Barbara M. Johnston, Peter R. Johnston, Stuart Corney and David Kilpatrick,  
Non-Newtonian blood flow in human right coronary arteries : Transient  
simulations, vol.39, (2005) , p.1116-1128

## 第 3 章

冠状動脈をモデルとした壁面に超弾性特性  
のある円管内流れの数値解析

### 3-1. 緒言

前回の研究により，冠動脈を模擬して内部流れのシミュレーションを行う場合，管壁は剛体ではなく粘弾性体に近い物性を持たせる必要があることが分かった。

本研究では，前回の研究で行った流体から管壁が受ける力に加えて，(1) 管壁から流体が受ける力も併せて計算できるようにし，管壁と流体の双方の相互作用について検証できるようにする，(2) さらにその管壁の物性もより実際に近づけるため，超弾性特性を持たせる，ことを目的とし，以下に示したモデルを用いてシミュレーションを行った。

#### 超弾性特性

血管壁の物性は，単純な弾性ではなく，受けた力に対して非線形的に変形するものである。その特性を表すモデルとして，血管壁に近いと言われているのが超弾性である<sup>[3-1][3-2]</sup>。超弾性特性の定義とは，ひずみエネルギー密度関数  $W$  を用いて，以下のように応力とひずみの関係が表せる材料である。

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} = 2 \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} \quad (3-1-1)$$

ここで， $S_{ij}$ ：第2Piola-Kirchhoff 応力テンソル， $E_{ij}$ ：Green-Lagrange ひずみテンソル， $C_{ij}$ ：右 Cauchy-Green 変形テンソル，である。

超弾性特性を持つ材料の中でもその応力に対する変形の度合いは様々であり，材料に合わせて種々のモデルが提案されている。本研究では，他の部位の血管壁に対して実績のある<sup>[3-3]</sup>Mooney-Rivlin モデル<sup>[3-4],[3-5]</sup>を採用した。

#### Mooney-Rivlin モデル

本研究では下記の形のモデルを使用した。

$$W = c_1(I_1 - 3) + c_2(I_2 - 3) + c_3(I_3 - 3)^2 \quad (3-1-2)$$

ここで,  $I_1, I_2, I_3$ : 第 1, 第 2, 第 3 ひずみ不変量,  $c_1, c_2, c_3$ [MPa]: 物性値, である.

$c_1, c_2, c_3$  は物性値であるので, 実験より求めた値を使用する. 今回は文献値より以下の表の通りとした<sup>[3-6]</sup>.

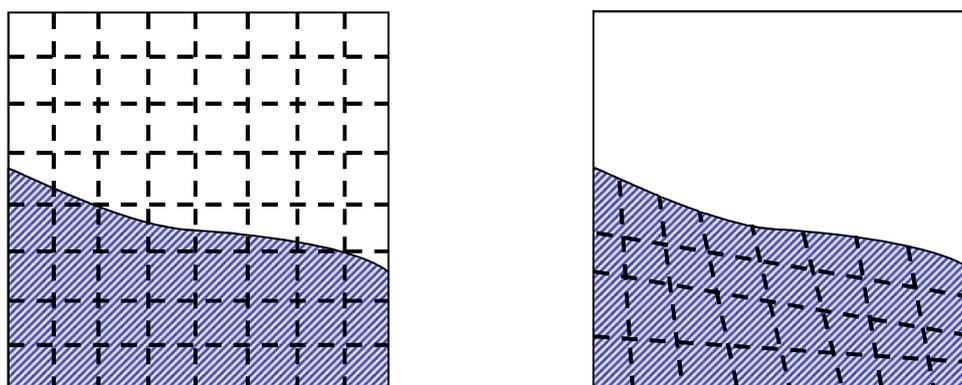
Table 3-1 Physical properties in Mooney-Rivlin model.

$c_1$	$c_2$	$c_3$
-2.5	2.5	2.5

### 流れと構造の連成

最初に述べた目的のためには、血流という流れの部分と血管壁という構造部分を同時解析する必要がある。しかし、両者間の計算方法の違いが問題となってくる。

流体計算はオイラー的であり、境界の位置を直接表現することができない。反対に構造計算ではラグランジュメッシュを使用し、そのメッシュを時々刻々変化させる必要があるため、メッシュが破綻する可能性もある。



Eulerian mesh

Lagrangian mesh

Fig. 3-1 Schematic of difference between Eulerian and Lagrangian mesh.

この問題を解決するため、本研究では、1格子内の流体/構造を判定する関数を導入<sup>[3-7]</sup>することによって、流体（血流）と構造（血管壁）の両方を同時に解析可能なものとした。

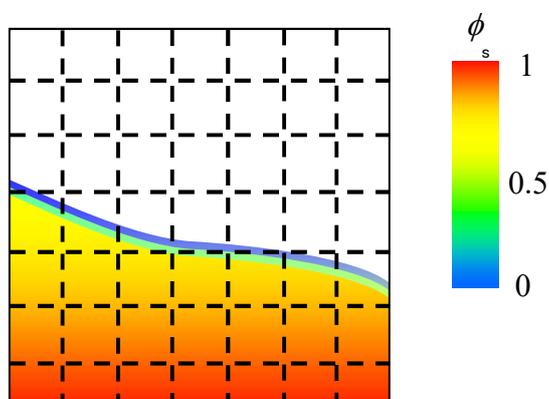


Fig. 3-2 Schematic of boundary between fluid and structure.

## 連成方法

流体と構造を連成して計算する方法は、生体内の流れ以外にも、高分子の流れに代表される工業的な分野など多くの応用例があり、本研究で用いるもの以外にも様々な種類が提唱されている。

ラグランジュ法では前述したように計算メッシュがつぶれてしまう可能性がある。この欠点を改良したものに ALE (Arbitrary Lagrangian – Eulerian) 法<sup>[3-8]</sup>がある。この方法では流体の速度と独立な格子移動の速度を導入して、計算格子が過度に変形してしまうラグランジュ法のデメリットが改善されている。ただし、計算格子を流体運動とは独立に動かす必要があるため、両者を関係づける計算を毎時刻行う必要があり、計算負荷が非常に大きい。

その他に流体と構造とをそれぞれオイラー格子とラグランジュ格子にて別々に定式化する IB (Immersed Boundary : 埋め込み境界) 法<sup>[3-9]</sup>などもある。この方法は様々な分野で応用されているが、ラグランジュ格子を毎時刻ごとに計算する必要があるため、やはり計算負荷が大きいものである。

これらの問題を解消するために、流体と構造を合わせて一つの流体として扱い計算を行う考え方があり<sup>[3-10]</sup>、VOF (Volume of Fluid) 法<sup>[3-11]</sup>や Level Set 法<sup>[3-12]</sup>などが提案され、線形弾性体や neo-Hookean 体などに関するシミュレーションが行われてきた。本研究では、冠動脈壁の物性を表す Mooney – Rivlin モデルを扱えるようにした完全オイラー手法<sup>[3-7]</sup>を応用することにより、流体 - 構造連成に伴う課題を解消したうえでより実際に近い形でシミュレーションを実現可能とした。

### 3-2. 支配方程式

(2-2-1) で示した連続の式に加え，以下の形のナビエ・ストークス方程式を導入する．

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2-2-1)$$

$$\rho(\partial_t \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (3-2-1)$$

$\boldsymbol{\sigma}$  は流体と構造の応力テンソルを足し合わせたものであり，以下のように表される．

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - \phi_s) \boldsymbol{\sigma}_f + \phi_s \boldsymbol{\sigma}_s \quad (3-2-2)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_f = 2\mu \mathbf{D} \quad (3-2-3)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_s = 2\mu_s \mathbf{D} + \boldsymbol{\sigma}_{sh} \quad (3-2-4)$$

3-1. で述べたように，流体と構造とを判定する重み関数は  $\phi_s$  で表している．また， $\mathbf{D} = (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)/2$  : ひずみ速度テンソル，とした．構造から受ける力を表す  $\boldsymbol{\sigma}_{sh}$  はコーシーの応力テンソルの定義から以下のように表されるものとした．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{sh} &= \frac{1}{\det(\mathbf{F})} \mathbf{F} \cdot \left\{ 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} \right\} \cdot \mathbf{F}^T \\ &= (2c_1 \mathbf{B} + 2c_2 (\text{tr}(\mathbf{B}) \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) + 4c_3 (\text{tr}(\mathbf{B}) - 3) \mathbf{B}) \end{aligned}$$

$$(3-2-5)$$

ここで、 $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$  : 右, 左コーシー・グリーン応力テンソル,  
 $\mathbf{F} = \partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{X}$  : 変形勾配 ( $\mathbf{x}$  : 現在座標,  $\mathbf{X}$  : 相対座標),  $W$  : ひずみエネルギー密度  
関数, をそれぞれ表す.

重み関数  $\phi_s$  と, 右コーシー・グリーン応力  $\mathbf{B}$  は, それぞれ以下のように輸送  
される.

$$\partial_t \phi_s + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi_s = 0 \quad (3-2-6)$$

$$\partial_t \mathbf{B} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{B} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}^T \quad (3-2-7)$$

ここで、 $\mathbf{L} = \nabla \mathbf{v}^T$  : 速度勾配テンソル, である.

### 3-3. スタッガード格子

速度と圧力を同じ格子点で定義すると不規則な圧力場が出現しやすくなる。そこで圧力をスカラー変数として通常の格子点で計算し、速度成分を通常格子の界面を中心としたスタッガード格子で計算する方法を採用する。

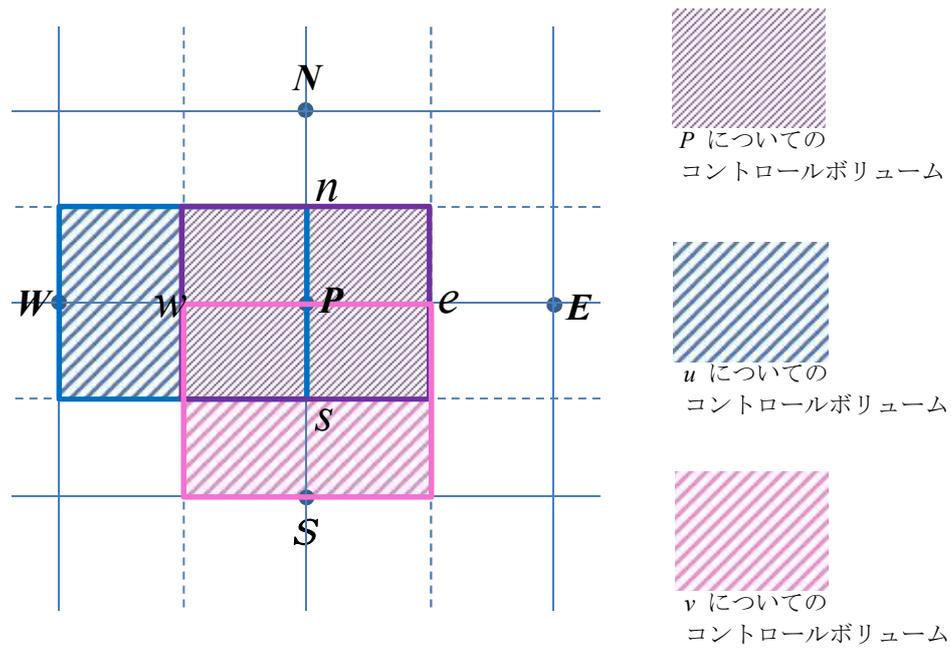


Fig.3-3 Position of Staggerd Grid.

### 3-4. SIMPLE (PISO) 法

本研究では質量保存則を維持するため有限体積法を用いた SIMPLE 法にて計算を行った。まず以下の運動量保存式を考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} + s_u \quad (3-4-1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vv) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial p}{\partial y} + s_v \quad (3-4-2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (3-4-3)$$

#### 3-4-1. x 方向運動方程式の離散化

まず  $u$  の運動量保存式について考える。

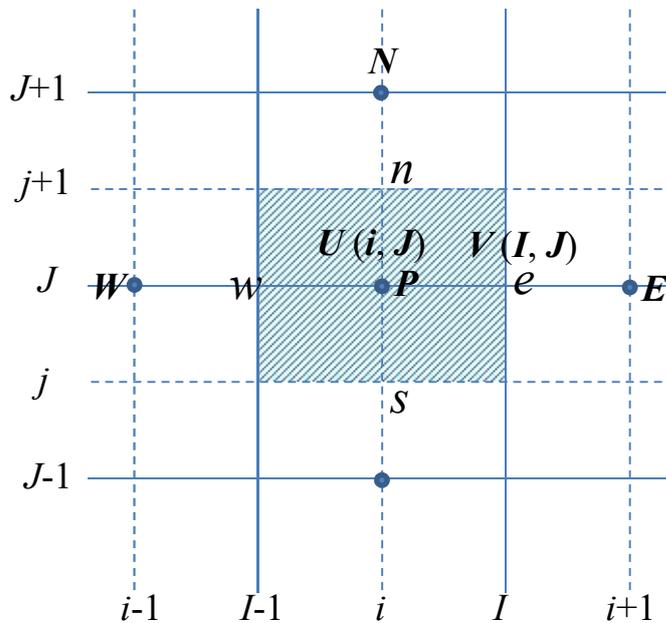


Fig. 3-4 Control volume about  $u$ .

図 3-4 より，式 (3-4-1) の対流項第 1 項は，以下の離散式に書き直すことができる．

$$\begin{aligned}
 \iint \frac{\partial}{\partial x}(\rho uu) dx dy &= \Delta y \int \frac{\partial}{\partial x}(\rho uu) dx \\
 &= \Delta y \times [(\rho uu)_e - (\rho uu)_w] \\
 &= \Delta y \times \rho [0.5 \times \{U(I, J) + U(I+1, J)\} \times u_e \\
 &\quad - 0.5 \times \{U(I-1, J) + U(I, J)\} \times u_w] \\
 &= CE \times u_e - CW \times u_w \\
 &= CE \times 0.5 \times [U(I+1, J) + U(I, J)] \\
 &\quad - CW \times 0.5 \times [U(I, J) + U(I-1, J)]
 \end{aligned}
 \tag{3-4-4}$$

同じく対流項第 2 項も離散式に書き直していく．速度  $v$  はこの式の中では未知数の扱いをせず，係数として組み込んでいく．

$$\begin{aligned}
 \iint \frac{\partial}{\partial y}(\rho vu) dx dy &= \Delta x \int \frac{\partial}{\partial y}(\rho vu) dy \\
 &= \Delta x \times [(\rho vu)_n - (\rho vu)_s] \\
 &= \Delta x \times \rho [0.5 \times \{V(I, J+1) + V(I-1, J+1)\} \times u_n \\
 &\quad - 0.5 \times \{V(I, J) + V(I-1, J)\} \times u_s] \\
 &= CN \times u_n - CS \times u_s \\
 &= CN \times 0.5 \times [U(I, J+1) + U(I, J)] \\
 &\quad - CS \times 0.5 \times [U(I, J) + U(I, J-1)]
 \end{aligned}
 \tag{3-4-5}$$

次に，粘性項第 1 項と第 2 項の離散化をする． $y$  方向の積分は平均値に区間幅を乗じ， $x$  方向は原始関数  $\mu \partial u / \partial x$  の差で表す．この微分項の東側境界”e”における値は，速度  $u$  の点 E, P の差を両点間の距離で除して与える．

$$\begin{aligned}
\iint \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy &= \Delta y \int \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \\
&= \Delta y \times \left[ \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_e - \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_w \right] \\
&= \Delta y \times \mu \times \frac{1}{\Delta x} [(\partial u)_e - (\partial u)_w] \\
&= DE \times (\partial u)_e - DW \times (\partial u)_w \\
&= DE \times [U(I+1, J) - U(I, J)] - DW \times [U(I, J) - U(I-1, J)]
\end{aligned}
\tag{3-4-6}$$

$$\begin{aligned}
\iint \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy &= \Delta x \int \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \\
&= \Delta x \times \left[ \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_n - \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_s \right] \\
&= \Delta x \times \mu \times \frac{1}{\Delta y} [(\partial u)_n - (\partial u)_s] \\
&= DN \times (\partial u)_n - DS \times (\partial u)_s \\
&= DN \times [U(I, J+1) - U(I, J)] - DS \times [U(I, J) - U(I, J-1)]
\end{aligned}
\tag{3-4-7}$$

圧力勾配項は、 $y$  方向については平均値に区間幅を乗じ、 $x$  方向は境界点  $w, e$  に圧力の格子点が配置されているため、それらの差として直接表すことができる。

$$\begin{aligned}
\iint \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right) dx dy &= -\Delta y \int \frac{\partial p}{\partial x} dx \\
&= -\Delta y [p_e - p_w] \\
&= \Delta y [P(I-1, J) - P(I, J)]
\end{aligned}
\tag{3-4-8}$$

以上の項をまとめると、 $x$ 方向運動方程式の離散化式は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
 AP(I,J) \times U(I,J) &= AN(I,J) \times U(I,J+1) + AS(I,J) \times U(I,J-1) \\
 &\quad + AE(I,J) \times U(I+1,J) + AW(I,J) \times U(I-1,J) + SU(I,J)
 \end{aligned}
 \tag{3-4-9}$$

$$\left[ \begin{array}{l}
 AN(I,J) = -0.5 \times CN + DN \\
 AS(I,J) = -0.5 \times CS + DS \\
 AE(I,J) = -0.5 \times CE + DE \\
 AW(I,J) = -0.5 \times CW + DW \\
 AP(I,J) = AN(I,J) + AS(I,J) + AE(I,J) + AW(I,J) \\
 \quad + (CN - CS + CE - CW) \\
 SU(I,J) = \Delta y \times [P(I-1,J) - P(I,J)]
 \end{array} \right.$$

### 3-4-2. y 方向運動方程式

y 方向の運動方程式の離散化も x 方向と同様に行える．格子点は図 3-5 のように定義される．

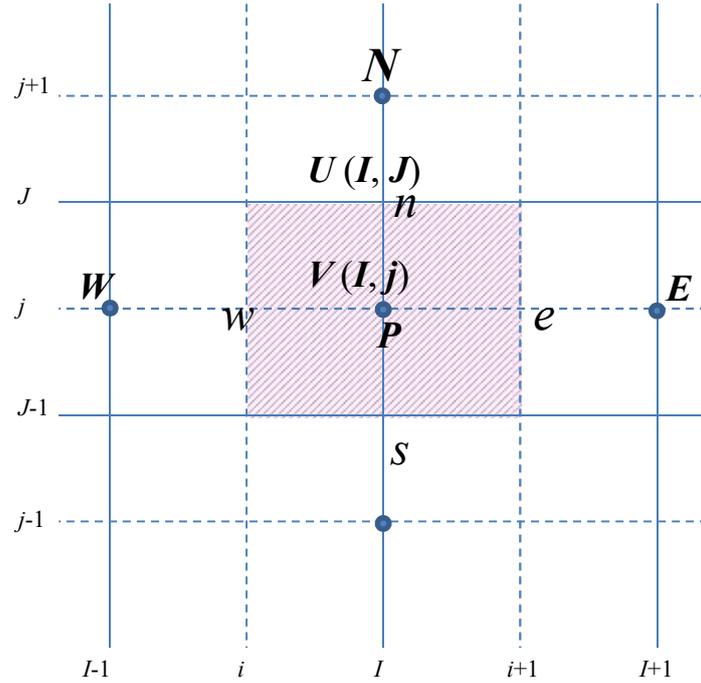


Fig. 3-5 Controle volume about v.

対流項第 1 項は,

$$\begin{aligned}
 \iint \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) dx dy &= \Delta y \int \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) dx \\
 &= \Delta y \times [(\rho uv)_e - (\rho uv)_w] \\
 &= \Delta y \times \rho [0.5 \times \{U(I+1, J) + U(I, J)\} \times v_e \\
 &\quad - 0.5 \times \{U(I, J) + U(I-1, J)\} \times v_w] \\
 &= CE \times v_e - CW \times v_w \\
 &= CE \times 0.5 \times [V(I+1, J) + V(I, J)] \\
 &\quad - CW \times 0.5 \times [V(I, J) + V(I-1, J)] \quad (3-4-10)
 \end{aligned}$$

対流項第 2 項は,

$$\begin{aligned}
\iint \frac{\partial}{\partial y}(\rho v v) dx dy &= \Delta x \int \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v) dy \\
&= \Delta x \times [(\rho v v)_n - (\rho v v)_s] \\
&= \Delta x \times \rho [0.5 \times \{V(I, J+1) + V(I, J)\} \times v_n \\
&\quad - 0.5 \times \{V(I, J) + V(I, J-1)\} \times v_s] \\
&= CN \times v_n - CS \times v_s \\
&= CN \times 0.5 \times [V(I, J+1) + V(I, J)] \\
&\quad - CS \times 0.5 \times [V(I, J) + V(I, J-1)]
\end{aligned} \tag{3-4-11}$$

粘性項は以下のように離散化できる.

$$\begin{aligned}
\iint \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy &= \Delta y \int \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \\
&= \Delta y \left[ \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right)_e - \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right)_w \right] \\
&= \Delta y \times \mu \times \frac{1}{\Delta x} [(\partial v)_e - (\partial v)_w] \\
&= DE \times (\partial v)_e - DW \times (\partial v)_w \\
&= DE \times [V(I+1, J) - V(I, J)] - DW \times [V(I, J) - V(I-1, J)]
\end{aligned} \tag{3-4-12}$$

$$\begin{aligned}
\iint \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy &= \Delta x \int \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy \\
&= \Delta x \times \left[ \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right)_n - \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right)_s \right] \\
&= \Delta x \times \mu \times \frac{1}{\Delta y} [(\partial v)_n - (\partial v)_s] \\
&= DN \times (\partial v)_n - DS \times (\partial v)_s \\
&= DN \times [V(I, J+1) - V(I, J)] - DS \times [V(I, J) - V(I, J-1)]
\end{aligned} \tag{3-4-13}$$

圧力項は,

$$\begin{aligned}
 \iint \left( -\frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy &= -\Delta x \int \frac{\partial p}{\partial y} dy \\
 &= -\Delta x [p_n - p_s] \\
 &= \Delta x [P(I, J-1) - P(I, J)]
 \end{aligned} \tag{3-4-14}$$

$x$  方向の時と同様に, 以上をまとめると,

$$\begin{aligned}
 AP(I, J) \times V(I, J) &= AN(I, J) \times V(I, J+1) + AS(I, J) \times V(I, J-1) \\
 &\quad + AE(I, J) \times V(I+1, J) + AW(I, J) \times V(I-1, J) + SV(I, J)
 \end{aligned} \tag{3-4-15}$$

$$\left[ \begin{array}{l}
 AN(I, J) = -0.5 \times CN + DN \\
 AS(I, J) = -0.5 \times CS + DS \\
 AE(I, J) = -0.5 \times CE + DE \\
 AW(I, J) = -0.5 \times CW + DW \\
 AP(I, J) = AN(I, J) + AS(I, J) + AE(I, J) + AW(I, J) \\
 \quad + (CN - CS + CE - CW) \\
 SV(I, J) = \Delta x \times [P(I, J-1) - P(I, J)]
 \end{array} \right.$$

### 3-4-3. 連続の式と運動方程式のカップリング

運動方程式からは速度を求めることができるため、連続の式からは圧力を得たいが、圧力項が含まれていないために運動方程式と組み合わせる必要がある。

速度  $u$  を求める  $x$  方向運動方程式の離散式を、

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + b + A_e (p_P - p_E) \quad (3-4-16)$$

$y$  方向についても以下のようにあらわす。

$$a_n v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + b + A_n (p_P - p_N) \quad (3-4-17)$$

圧力に対して適切な推定値  $p^*$  を与えると、速度に対しての近似値  $u^*$ ,  $v^*$  を上記 2 式から以下のように求めることができる。

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + b + A_e (p_P^* - p_E^*) \quad (3-4-18)$$

$$a_n v_n^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + b + A_n (p_P^* - p_N^*) \quad (3-4-19)$$

正しい圧力および速度を  $p$ ,  $u$ ,  $v$  とし、推定値  $p^*$  に対する補正量を  $p'$ , 対応する速度補正を  $u'$ ,  $v'$  とすると、

$$p = p^* + p' \quad (3-4-20)$$

$$u = u^* + u' \quad (3-4-21)$$

$$v = v^* + v' \quad (3-4-22)$$

これら 3 式を(3-4-16), (3-4-17)式に代入し、それぞれ(3-4-18), (3-4-19)式を差し引くと、

$$a_e u'_e = \sum a_{nb} u'_{nb} + b + A_e (p'_P - p'_E) \quad (3-4-23)$$

$$a_n v'_n = \sum a_{nb} v'_{nb} + b + A_n (p'_P - p'_N) \quad (3-4-24)$$

ここで隣の格子点の速度補正量の影響が小さいと考えられるため、右辺第 1 項を省略する。仮に収束解が得られれば補正量はすべて 0 になるため、合理的な仮定である。したがって、速度補正量は、

$$u'_e = d_e (p'_P - p'_E), \quad d_e \equiv A_e / a_e \quad (3-4-25)$$

$$v'_n = d_n (p'_P - p'_N), \quad d_n \equiv A_n / a_n \quad (3-4-26)$$

で与えられるので、連続の式の離散化に必要な速度は次式で表される。

$$u_e = u_e^* + d_e (p'_P - p'_E) \quad (3-4-27)$$

$$v_n = v_n^* + d_n (p'_P - p'_N) \quad (3-4-28)$$

連続の式 (3-4-3) をコントロール・ボリュームについて積分すると、

$$[(\rho u)_e - (\rho u)_w] \Delta y + [(\rho v)_n - (\rho v)_s] \Delta x = 0 \quad (3-4-29)$$

この式に (3-4-27), (3-4-28) 式, および  $u_w, v_s$  に関する同様の式を代入し、圧力補正量  $p'$  に関する以下の圧力補正式を得る。

$$a_P p'_P = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + b \quad (3-4-30)$$

$$a_E = \rho d_e \Delta y, \quad a_W = \rho d_w \Delta y, \quad a_N = \rho d_n \Delta x, \quad a_S = \rho d_s \Delta x$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S$$

$$b = \left[ (\rho u^*)_w - (\rho u^*)_e \right] \Delta y + \left[ (\rho v^*)_s - (\rho v^*)_n \right] \Delta x$$

以上が基本的な SIMPLE 法の手順である。

本研究では非定常流れを扱うために、SIMPLE 法を改良した PISO 法を採用した。PISO 法では SIMPLE 法の計算に加え補正の手続きをさらにもう 1 回増やす。

計算手順は以下に示すとおりである。

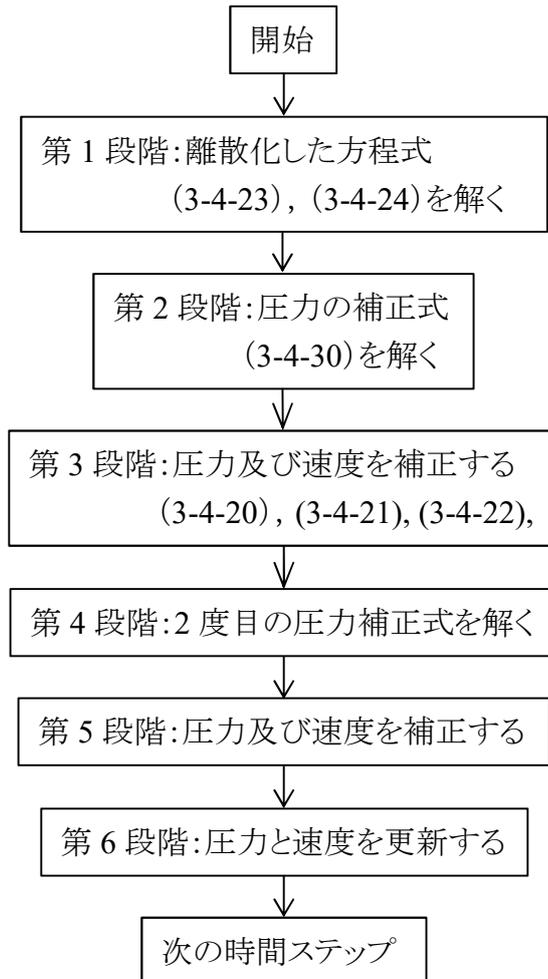


Fig. 3-6 Flow chart of PISO Method.

### 3-5. 対流項の離散化

式 (3-2-6) と (3-2-7) の対流項は 5 次の WENO 法にて離散化を行った。対流項を  $u \partial f / \partial x$  ( $f: \phi_s, B$ ) とすると,

$$(u \partial f / \partial x) = \frac{1}{12\Delta x} \left[ \frac{(u + |u|)(a_1^{(-)} g_1^{(-)} + a_2^{(-)} g_2^{(-)} + a_3^{(-)} g_3^{(-)})}{a_1^{(-)} + a_2^{(-)} + a_3^{(-)} + \varepsilon} + \frac{(u - |u|)(a_1^{(+)} g_1^{(+)} + a_2^{(+)} g_2^{(+)} + a_3^{(+)} g_3^{(+)})}{a_1^{(+)} + a_2^{(+)} + a_3^{(+)} + \varepsilon} \right] \quad (3-5-1)$$

$$a_1^{(\pm)} = (s_2^{(\pm)} s_3^{(\pm)})^2, \quad a_2^{(\pm)} = 6(s_1^{(\pm)} s_3^{(\pm)})^2, \quad a_3^{(\pm)} = 3(s_1^{(\pm)} s_2^{(\pm)})^2$$

$$g_1^{(\pm)} = 2\delta(f)_{i\pm 5, j} - 7\delta(f)_{i\pm 3, j} + 11(f)_{i\pm 1, j}$$

$$g_2^{(\pm)} = -\delta(f)_{i\pm 3, j} + 5\delta(f)_{i\pm 1, j} + 2(f)_{i\mp 1, j}$$

$$g_3^{(\pm)} = 2\delta(f)_{i\pm 1, j} + 5\delta(f)_{i\mp 1, j} - \delta(f)_{i\mp 3, j}$$

$$s_1^{(\pm)} = 13(\delta(f)_{i\pm 5, j} - 2\delta(f)_{i\pm 3, j} + \delta(f)_{i\pm 1, j})^2 + 3(\delta(f)_{i\pm 5, j} - 4\delta(f)_{i\pm 3, j} + 3\delta(f)_{i\pm 1, j})^2$$

$$s_2^{(\pm)} = 13(\delta(f)_{i\pm 3, j} - 2\delta(f)_{i\pm 1, j} + \delta(f)_{i\mp 1, j})^2 + 3(\delta(f)_{i\pm 3, j} - \delta(f)_{i\mp 1, j})^2$$

$$s_3^{(\pm)} = 13(\delta(f)_{i\pm 1, j} - 2\delta(f)_{i\mp 1, j} + \delta(f)_{i\mp 3, j})^2 + 3(3\delta(f)_{i\pm 1, j} - 4\delta(f)_{i\mp 1, j} + \delta(f)_{i\mp 3, j})^2$$

もう一方の  $v \partial f / \partial y$  も同様に離散化を行った。

### 3-6. 計算条件

計算領域は外径 2mm, 内径 1.4mm, 長さ 20mm の直管とし, 2次元計算を行った.

外壁の条件はすべりなし条件とした. また入口からは図 3-3 に示したような速度の実験値 (冠動脈入口速度) (図 2-6) を流入させ, 出口では速度勾配が無いものとした. 支配方程式は, 振動周期 1s, 最大速度 0.2m/s, 代表長さ=管直径で無次元化し, レイノルズ数は 70 とした. 流体 (血液) の物性値は, 密度  $\rho=1050 \text{ kg/m}^3$ , 粘度  $\mu=0.0035 \text{ Pa}\cdot\text{s}$  とした.

格子数は  $640 \times 32$ , 時間刻みは  $1.0 \times 10^{-4}$  で計算を行った.

### 3-7. 妥当性の評価

本題の計算を行う前に，3-1，3-2 で述べた計算モデルの妥当性を検証するための計算を行った．図 3-4 に示したように，2.0 の間隔で置かれた 8.0 の長さの平行平板間の流れを考える．超弾性体が平板間の中心に置かれており，流体は超弾性体の上と下を流れる．上下の平板は，それぞれ  $U_w \sin \omega t$  と  $-U_w \sin \omega t$  の速度で，図の左右方向に振動する．

今回は妥当性を評価するため既存の結果と比較可能なように， $U_w = 1.0$ ， $\omega = \pi$ ，振動周期  $T = 2.0$ ，超弾性体の高さ  $h = 1.0$  とし，格子数は  $8 \times 128$  で計算を行った．また，密度  $\rho$  と粘度  $\mu$  をそれぞれ 1.0 とし，式 (3-2) 中の係数を  $c_1 = 2.5$ ， $c_2 = 0.0$ ， $c_3 = 0.0$  とした．

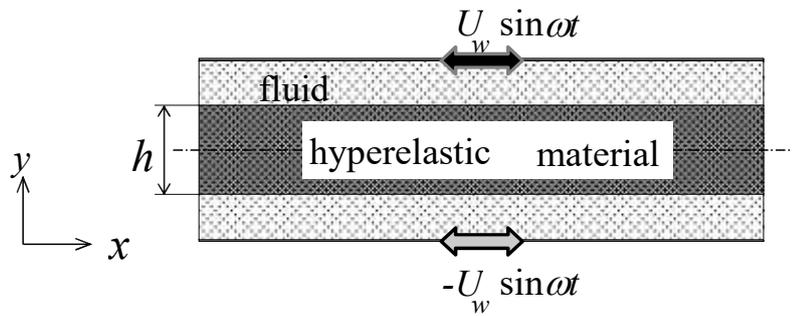


Fig. 3-4 Schematic of model for validation test.

計算結果は文献[3-8]と比較し，図 3-5 に示した．

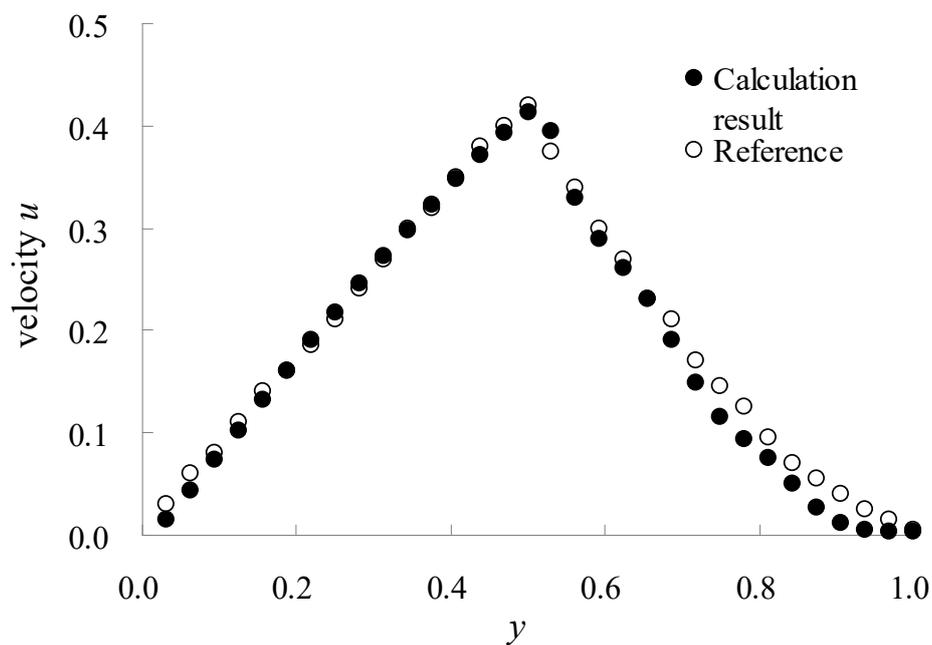


Fig. 3-5 Comparison of velocity distribution ( $T=0$ ) .

上図において，図 3-4 の下半分 ( $y = 0 \sim 1.0$ ) についての瞬時速度 ( $T=0$ ) について，文献値との比較を行った． $y = 0 \sim 0.5$  までが流体， $y = 0.5 \sim 1.0$  までが超弾性体内部についての結果である．その結果，文献値との差は平均速度  $1.8 \times 10^{-1}$  に対して  $2.8 \times 10^{-2}$  の差となり，また全体的な傾向も一致した．

### 3-8. 計算結果

図 3-6 に流入速度が最大の時刻の重み関数 $\phi_s$  の分布と速度ベクトルを示す.

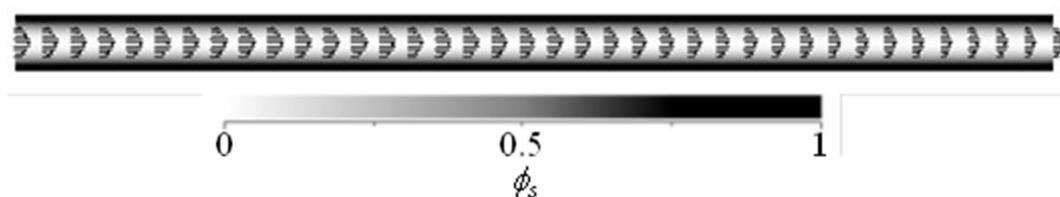


Fig.3-6 Velocity vector and distribution of  $\phi_s$

本計算では $\phi_s$ が 0.5 より小さい領域を流体, 0.5 以上で壁部分とした. この図で示すように流体と構造を同時に計算することができた.

図 3-7 に  $t=0$  と  $t=0.85$  (流入速度が最大) での入口近くの拡大図を示す.

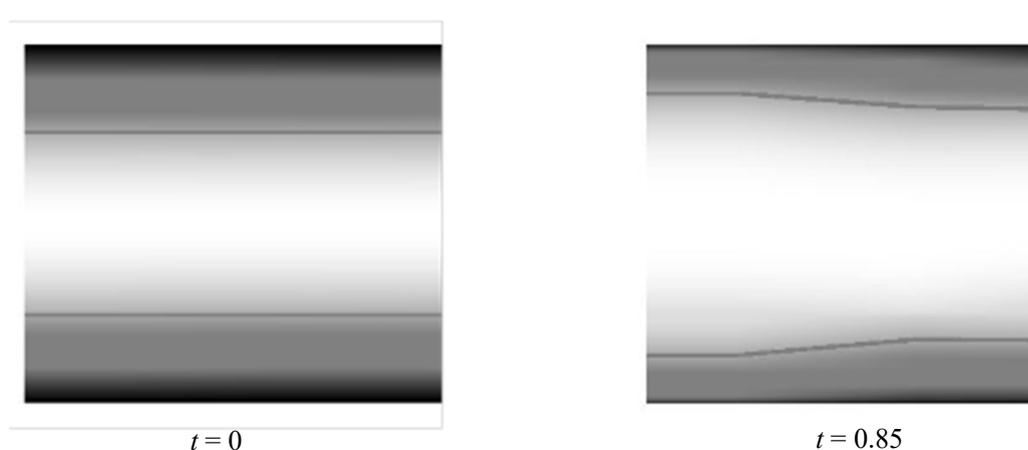


Fig.3-7 Enlarged view in the vicinity of the inlet  
(solid line: the boundary between fluid and wall).

この図では色の濃い部分が構造部分を薄い部分が流体を表しており, 流体と構造部分の境界を実線で示している.

この結果より, 管壁 (構造) が流入してくる流体によって押し広げられている様子を見ることができた. 第 2 章で示した以前の研究では, 血管壁部分につ

いては計算できていなかったため、流体と管壁の境界の変形まで示すことができていなかった。3-1 で説明した方法を採用することにより、このように境界の変形を詳細に表すことが可能になった。

図 3-8 に壁を剛体と仮定した場合と、本研究で導入した超弾性体のモデルを用いた場合のせん断応力値の計算結果を示す。

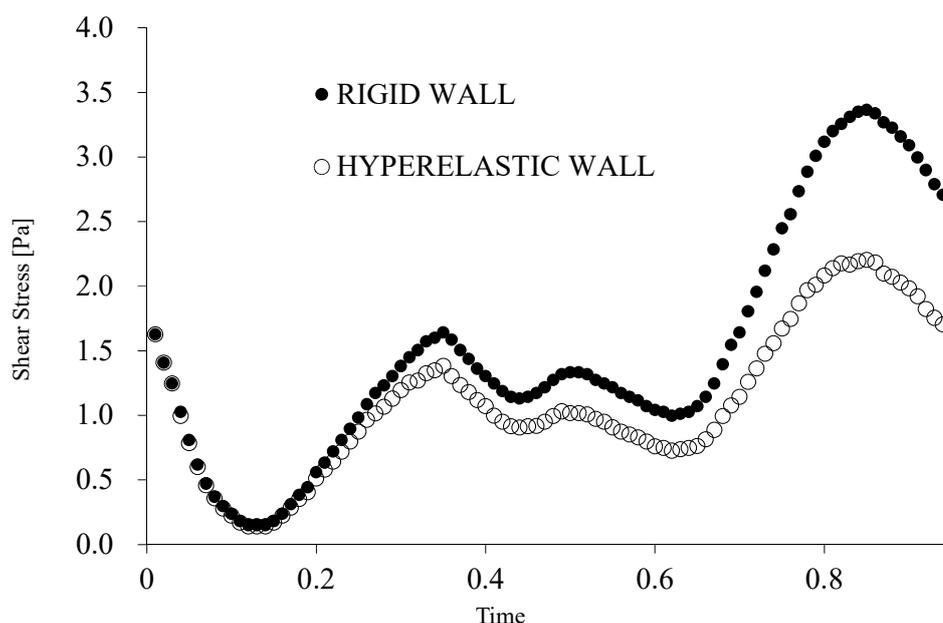


Fig. 3-8 Temporal variation of shear stress at the inlet.

この結果より、実際の血管壁の物性に近い超弾性のある管壁上のせん断応力値は、管壁を剛体と仮定した場合よりも 1 周期中（時刻 0~1 まで）で最大 30%程度も異なることが分かった。

MRI (Magnetic Resonance Imaging: 核磁気共鳴画像法) や血管造影法などの画像診断法を用いてせん断応力値を計測し動脈硬化発症部位と比較をすることにより、せん断応力分布の偏りが動脈硬化の原因となることが指摘されており [3-1][3-13], この 1 周期内での違いは重要であると言える。

### 3-9. 結論

冠動脈を模擬した管の壁により実際に近い Mooney-Rivlin モデルで表される超弾性特性を与え、流体と構造を同時に解析可能な手法を用いてシミュレーションを行い、以下の結論を得た。

- (1) 管壁に厚みを持たせて計算させることができたため、流入してくる流れによって管壁が変形させられる様子を捉えることができた。
- (2) 超弾性特性を考慮すると、しない場合に比べてせん断応力値に約 30%程度の違いが生じることが分かった。
- (3) 固体と仮定した場合の計算結果との比較から、単純な粘弾性ではなく、より複雑な超弾性を考慮するべきであることが分かった。

## 参考文献

- [3-1] Gerhard A. Holzapfel, Gerhard Sommer, Christian T. Gasser, and Peter Regitnig, Determination of layer-specific mechanical properties of human coronary arteries with nonatherosclerotic intimal thickening and related constitutive modelling, *American journal of Physiology Heart and Circulatory Physiology*, vol.289, (2005), p.2048-2058
- [3-2] Zhijie Wang, Mark J. Golob and Naomi C. Chesler, Viscoelastic and Biscoplastic materials: Chapter 7 Viscoelastic Properties of Cardiovascular Tissues, InTechOpen, (2016)
- [3-3] 鳥井 亮, 大島まり, 小林敏雄, 高木 清, Tayfun E. TEZDUYAR, Image-Based 血流数值シミュレーションにおける壁面弾性の影響, 日本機械学会論文集 (A 編), 70 卷 697 号, (2004), p.1224-1231
- [3-4] M. Mooney, A theory of large elastic deformation, *Journal of Applied Physics*, vol.11, (1940), p.582-592
- [3-5] R. S Rivlin, Large elastic deformations of isotropic materials  $\chi$ ; further development of general theory, *Philosophical Transactions off the Royal Society A*, vol.241, (1948), p. 379-397
- [3-6] C. Lally, A. J. Reid, and P. J. Prendergast, Elastic behavior of Porcine Coronary Artery Tissue under Uniaxial and Equibiaxial Tension, *Annals of Biomedical Engineering*, vol.21, No.10, (2004), p.1355-1364
- [3-7] K. Sugiyama, S. Ii, S. Takeuchi, S. Takagi, and Y. Matsumoto, A Full Eulerian Finite Difference Approach for Solving Fluid – Structure Coupling Problem, *Journal of Computational Physics*, Vol.230, (2011), p.596-627
- [3-8] 数值流体力学編集委員会 編, 数值流体力学シリーズ 4 移動境界流れ解析, 東京大学出版会, (2000), p.5-11
- [3-9] C. S. Peskin, The immersed boundary method, *Acta Numerica*, vol.11, (2002), p.479-517
- [3-10] G. Tryggvason, M. Sussman, M.Y.Hussaini, *Computational Methods for Multiphase Flow*, Cambridge University Press, (2007), p37-77

- [3-11] C. W. Hirt and B. D. Nichols, Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries, *Journal of Computational Physics*, vol.39, (1981) , p.201-225
- [3-12] M. Sussman and P. Smereka, Axisymmetric free boundary problems, *Journal of Fluid Mechanics*, vol.341, (1997) , p.269-294
- [3-13] Akram M. Shaaban and André J. Duerinckx, Wall Shear Stress and Early Atherosclerosis, *American Journal of Roentgenology*, vol.174(6), (2000), p. 1657-1665

## 第 4 章

冠動脈を模した超弾性特性のある分岐管内  
流れの数値解析

#### 4-1. 緒言

第 3 章で用いた，流体と構造を同時に計算する手法を用い，冠動脈の特徴である分岐を持った管内流れについてシミュレーションを行った。

Konishi ら<sup>[4-1]</sup>によると，冠動脈の分岐角度は個体差が大きく，鋭角から鈍角の場合まで様々である．本研究では分岐角度の違いによる内部の流れについて調べるため，分岐角 4 種類について，それぞれ管内流れをシミュレーションし，その違いについて考察を行った。

#### 4-2. 計算領域

下図に示すような分岐管内の流れについて、分岐角度を、45, 60, 90, 135 度としてそれぞれの場合について計算を行った。

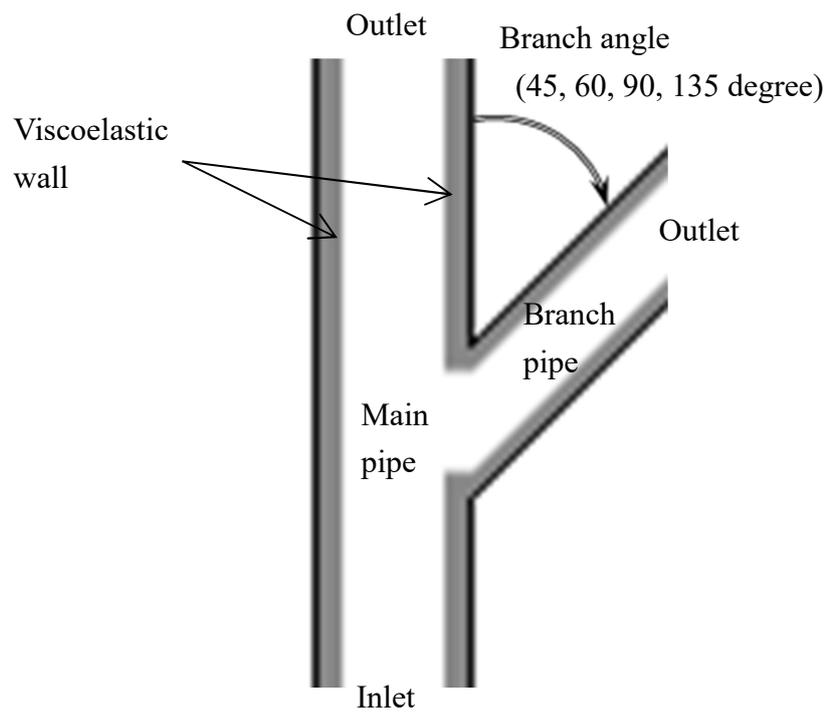


Fig. 4-1 Calculation field for branching pipe.

### 4-3. 計算条件

管入口から図 3-4 と同様の入口流速を与え，圧力に関しては空間的な勾配を 0 とした．出口に関する条件は，出口が複数となったことから，これまでのような速度勾配 0 とする自然流出条件ではなく，流入量が出口面積に応じて流出するように条件を設定した．また圧力に関しても出口では図 4-2 に示すような圧力を与えた<sup>[4-2]</sup>．

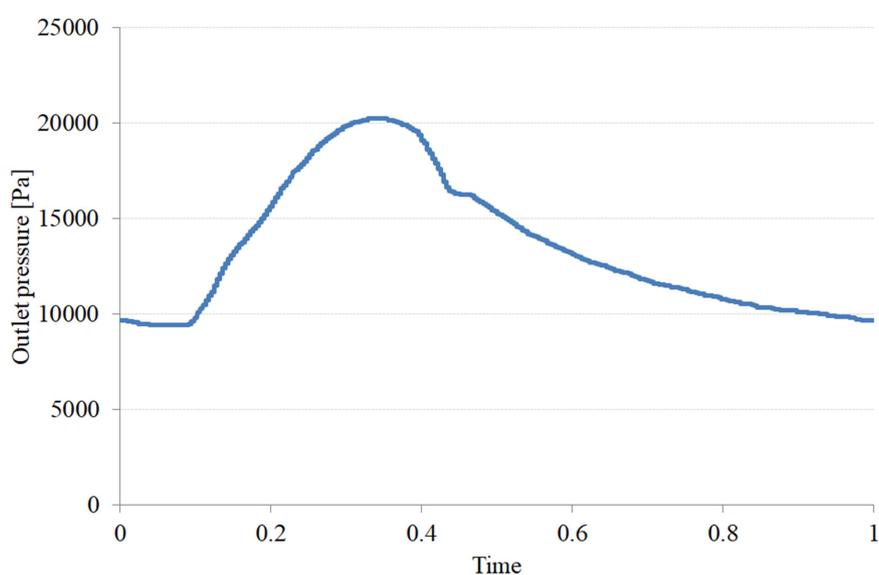
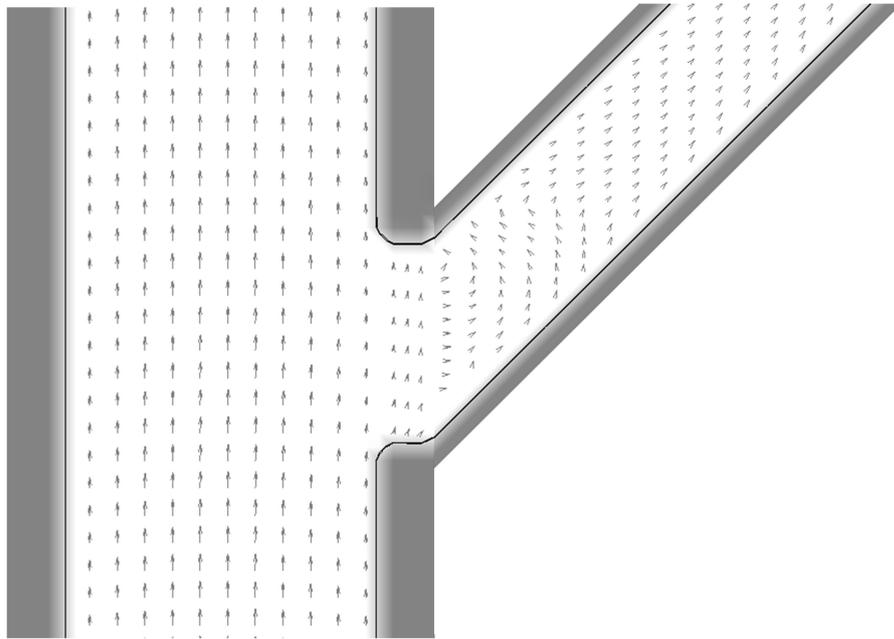


Fig. 4-2 Outlet pressure.

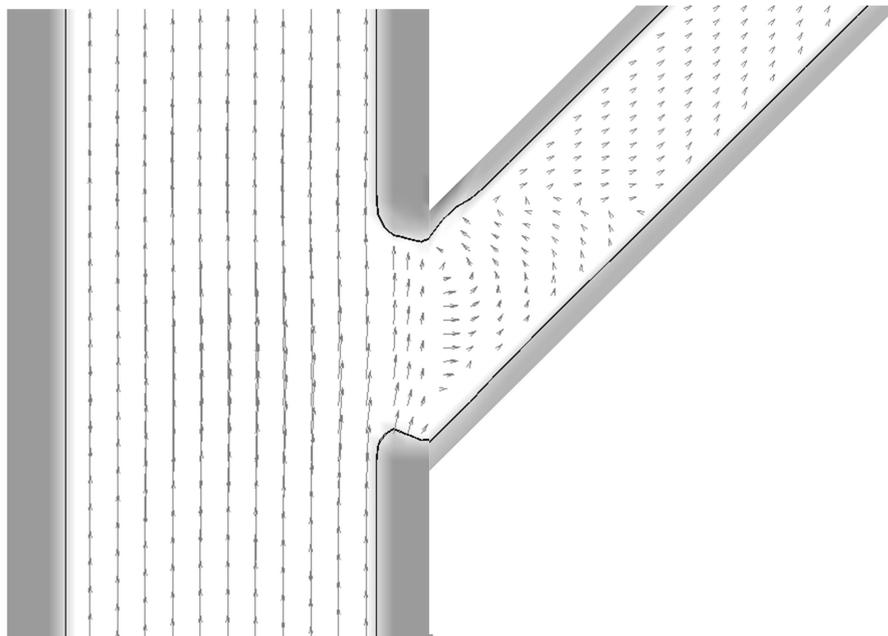
主管と分岐管の管径は 2:1 とした．格子数は  $32 \times 64 \times 64$  とし，時間刻みは  $1.0 \times 10^{-5}$  で計算した．

流体の物性はこれまでと同じく密度  $\rho = 1050 \text{ kg/m}^3$ ，粘度  $\mu = 0.0035 \text{ Pa}\cdot\text{s}$  とした．

#### 4-4. 計算結果

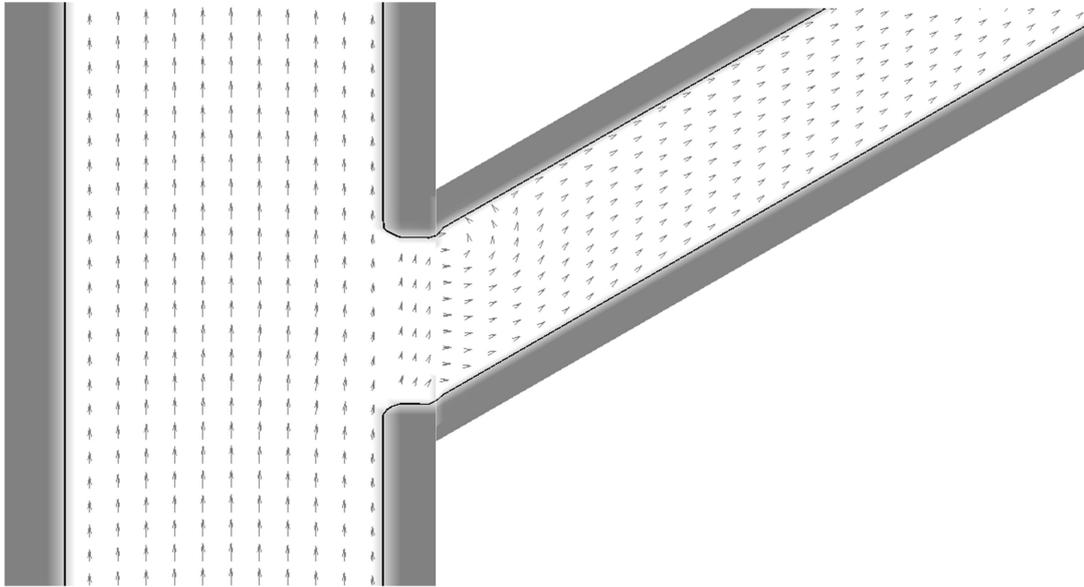


(a)  $t = 0.35$

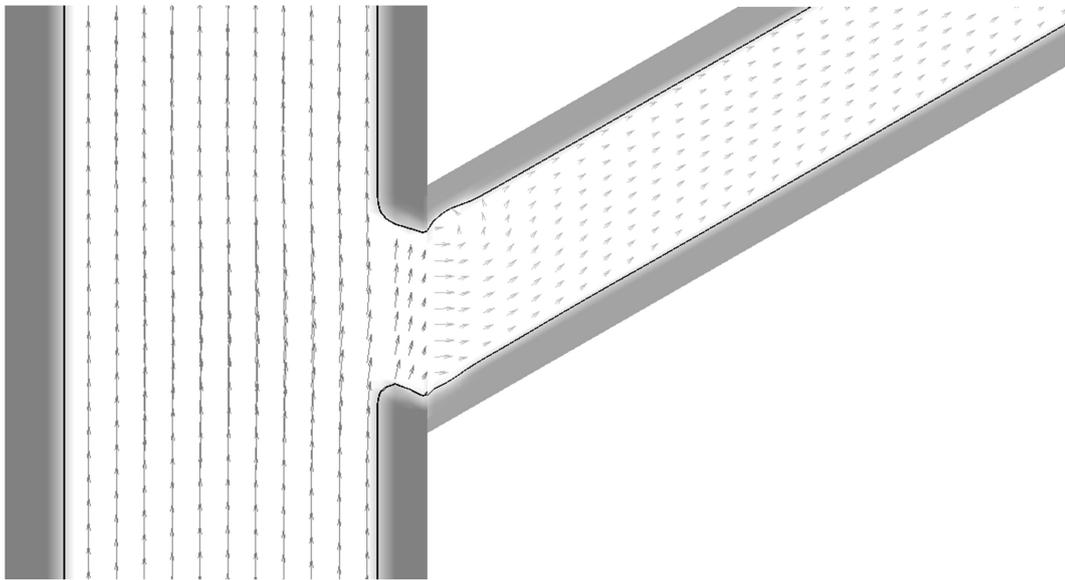


(b)  $t = 0.85$

Fig. 4-3-1 Velocity vectors with the 45 degree branch angle  
(Solid line : boundary between fluid and wall).

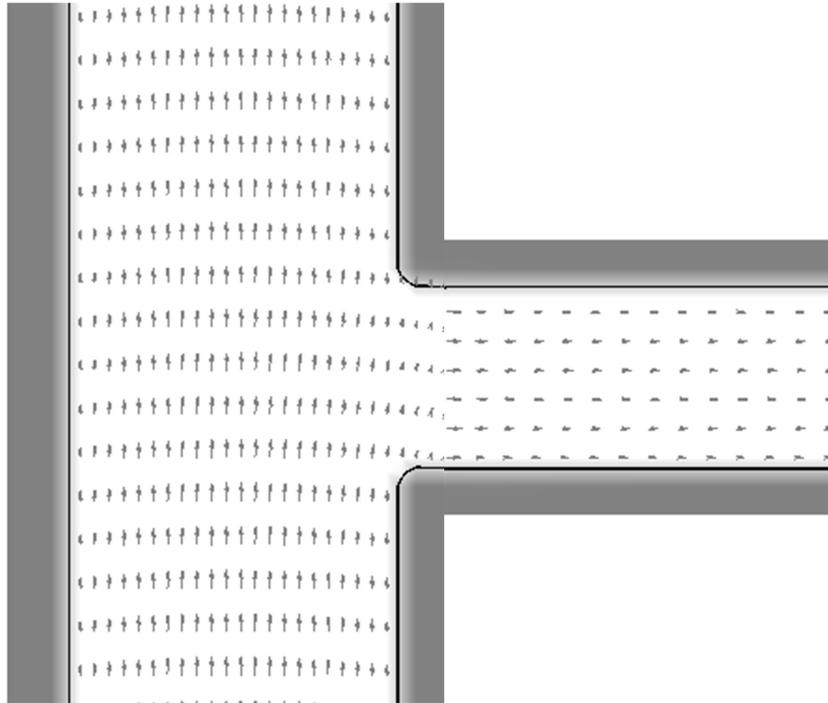


(a)  $t = 0.35$

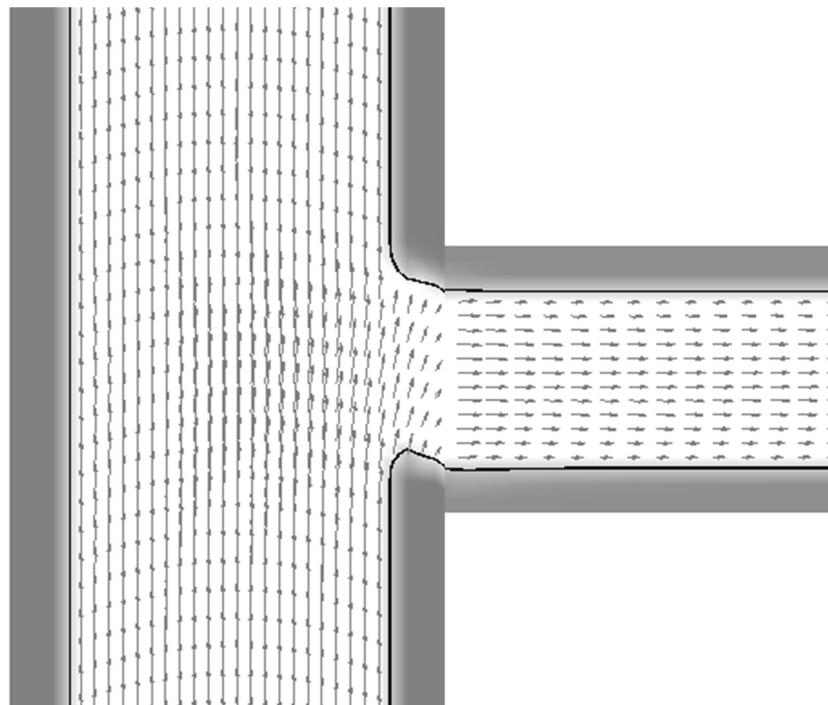


(b)  $t = 0.85$

Fig. 4-3-2 Velocity vectors with the 60 degree branch angle  
(Solid line : boundary between fluid and wall).

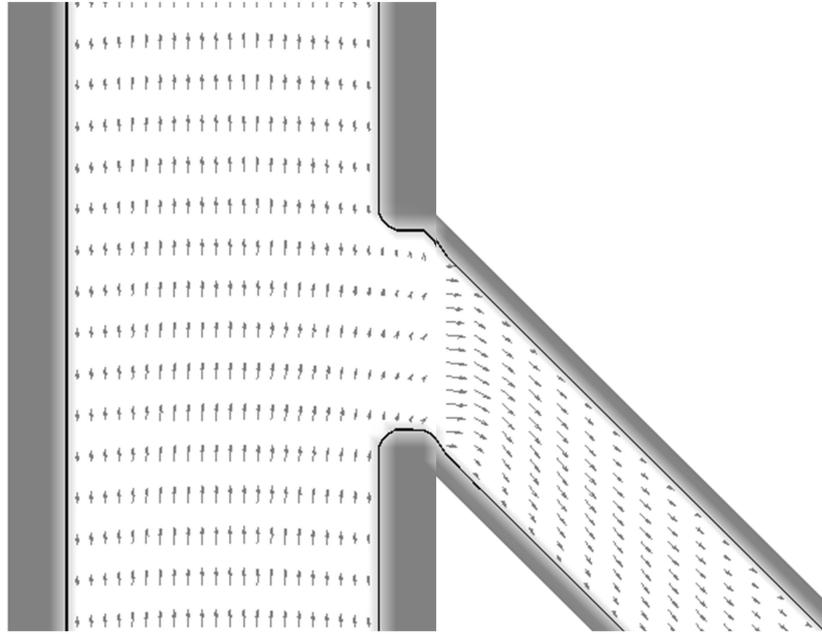


(a)  $t = 0.35$

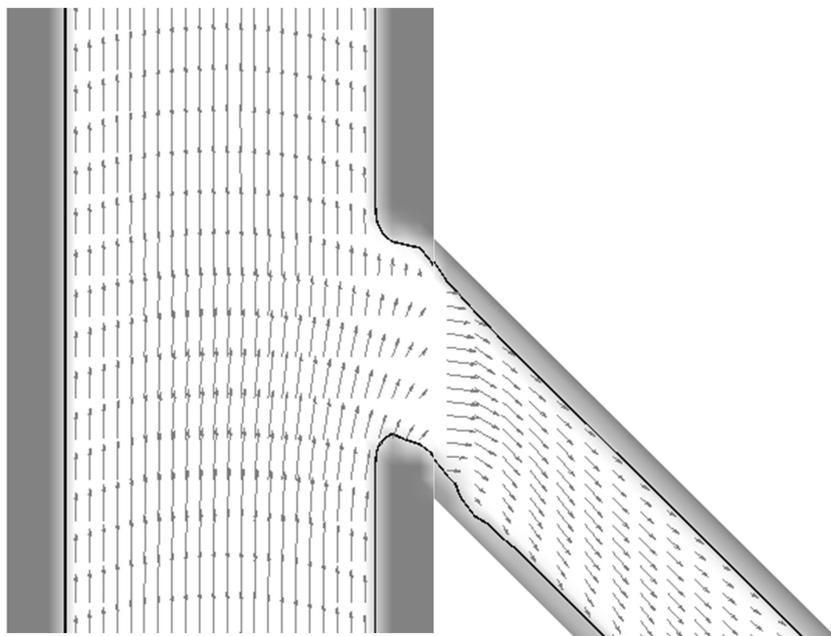


(b)  $t = 0.85$

Fig. 4-3-3 Velocity vectors with the 90 degree branch angle  
(Solid line : boundary between fluid and wall).



(a)  $t = 0.35$



(b)  $t = 0.85$

Fig. 4-3-4 Velocity vectors with the 135 degree branch angle  
(Solid line : boundary between fluid and wall).

図 4-3-1~4 に、分岐角が 45, 60, 90, 135 度の場合の速度ベクトルを、理口流入速度の比較的小さい時刻 0.35 と流入速度の大きい時刻 0.85 について示す。図中の実線は、1 格子内の流体／壁面を決定する重み関数によって決定された、両者の境界線である。どの分岐角においても、分岐部分の主管側の壁面のうち、上流側の壁面が時刻 0.85 では下流側に向かって引き延ばされている様子が分かる。逆に分岐部分の下流側の壁面では、流体からの力を受けて下流側に縮められている様子を明らかにすることができた。

また、分岐角が 45 度と 60 度の場合（図 4-3-1, 4-3-2）では、分岐管の壁面のうち、下流側の壁面が分岐部に近い場所において、流れを受けて局所的に凹んでいる様子が分かった。逆に分岐角が 135 度の場合（図 4-3-4）は、分岐管の壁面上流側の壁面が局所的に凹んでいる様子を捉えることができた。

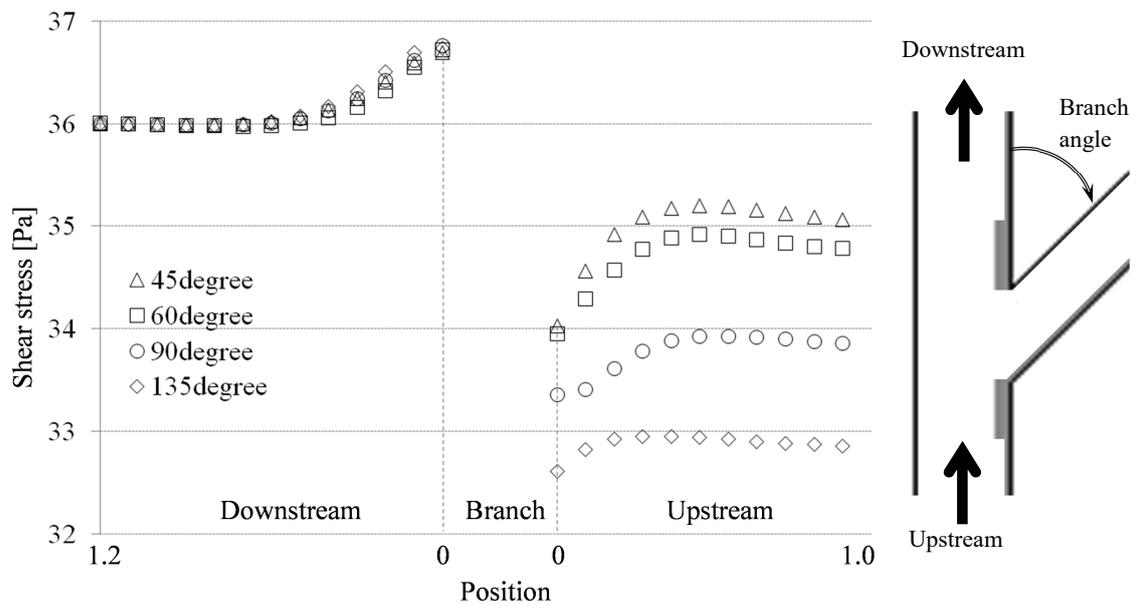


Fig.4-4 Shear stress on the wall of the main pipe near the branch.

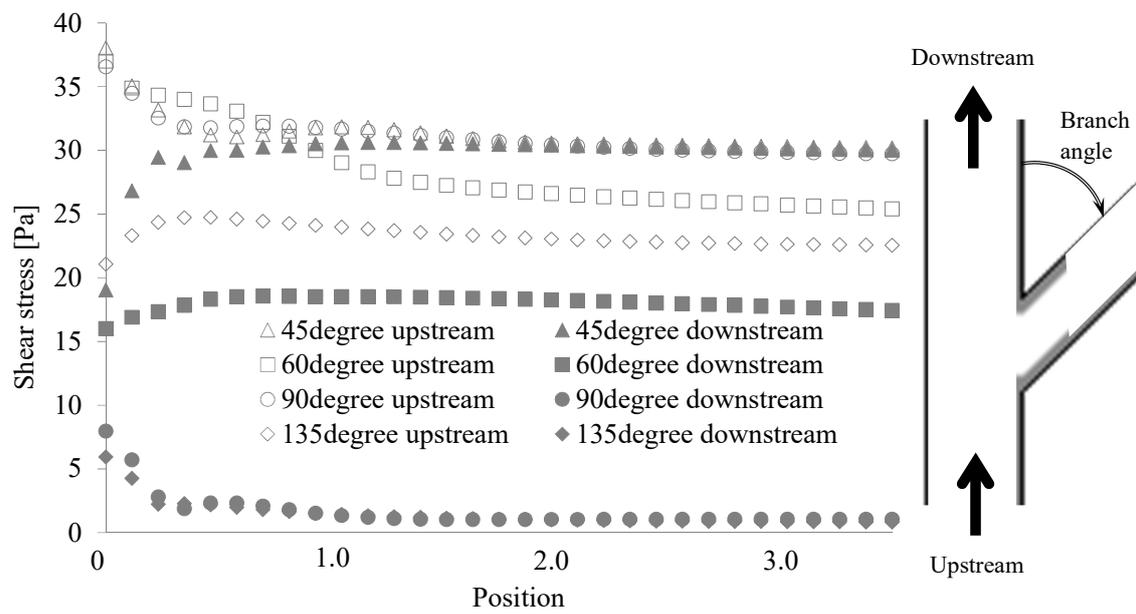


Fig. 4-5 Shear stress on the wall of the branch pipe.

図 4-4 に、時刻 0.85 における主管の分岐部近くの壁のせん断応力値を分岐角ごとに比較した結果を示す。どの分岐角においても、上流から分岐部に近づくにつれて急激にせん断応力値が高くなっている。また分岐部から下流に向かう位置では、分岐を過ぎた直後で急激に大きくなった後、ほぼ同じ値となっている。分岐前のせん断応力値が分岐角によらずほぼ同じ傾向と値であるのに対し、分岐後のせん断応力値は、傾向は同じものの大きさが異なっており、分岐角が大きくなるにつれてせん断応力値が小さくなっていることが分かる。

図 4-5 にて、時刻 0.85 における分岐管壁のせん断応力値を分岐角ごとに、上流側壁、下流側壁に分けて比較を行った。横軸の位置は分岐部からの距離を示している。この図から、分岐角 45、60 度（図中、三角と四角のマーカ）の上流側のせん断応力は分岐部から離れるにしたがって徐々に小さくなっており、両者の下流側のせん断応力値は分岐部から離れるにつれて大きくなっていることが分かる。分岐角 135 度（図中、ひし形のマーカ）では、上流側せん断応力が徐々に大きくなっており、下流側は徐々に小さくなっていており、分岐角 45、60 度の場合とは逆の傾向を示すことが分かった。また分岐角 90 度の場合は、上流側、下流側のどちらでも分岐部から離れるにしたがって小さくなっていく傾向を示している。

臨床学的研究によると<sup>[4-3], [4-4], [4-5]</sup>、冠動脈においては分岐直後の部位に動脈硬化病変が発生しやすく、その理由が今回の研究から明らかになった。

#### 4-5. 結論

冠動脈の分岐部を模擬した分岐管壁に超弾性特性を与え，異なる分岐角を持つ管内についてシミュレーションを実施し，以下の結論を得た．

- (1) 流れによって，分岐部前後の管壁が変形させられる様子を明らかにすることができた．
- (2) 分岐角によってせん断応力分布の傾向が異なることが分かり，その閾値は  $90^\circ$  付近であると考えられる．
- (3) 分岐直後に動脈硬化病変が発生しやすい既存の研究<sup>[4-3], [4-4], [4-5]</sup>に対して，その理由を示した．

## 参考文献

- [4-1] T Konishi, T. Yamamoto, N. Funayama, H, Nishihara, and D. Hotta, Relationship between left coronary artery bifurcation angle and restenosis after stenting of the proximal left anterior descending artery, *Coronary Artery Disease*, vol.27, (2016) , p.449-459
- [4-2] Sandora I. Bernad, Elena S. Bernad, Marius Craina, Izabella Sargan, Alin Totoran, and Cosmin Brisan, Particle Depositions and Related Hemodynamic Parameters in the Multiple Stenosed Right Coronary Artery, *Journal of Clinical Medicine Research*, vol.4(3), (2012), p.177-189
- [4-3] Toshihisa Asakura and Takeshi Karino, Flow Patterns and Spatial Distribution of Atherosclerotic Lesions in Human Coronary Arteries, *Circulation Research*, vol.66 (4), (1990), p.1045-1066
- [4-4] 狩野 猛, 和田成生, 内貴 猛, 血管病の局在化におよぼす物理的・流体力学的因子の影響, *電子科学研究*, vol. (4), (1997), p.22-32
- [4-5] 五味淵誠, 動脈硬化性心疾患における冠動脈の病理組織学的研究, *日医大誌*, vol.44 (2), (1997), p.14-25

## 第 5 章

拡大・収縮する球上に置かれた管内流れの  
シミュレーション

## 5-1. 緒言

冠動脈について考えると，その置かれた位置が特殊であることが分かる．つまり，心臓というそれ自身が拍動運動している物体の上に，冠動脈が存在している．

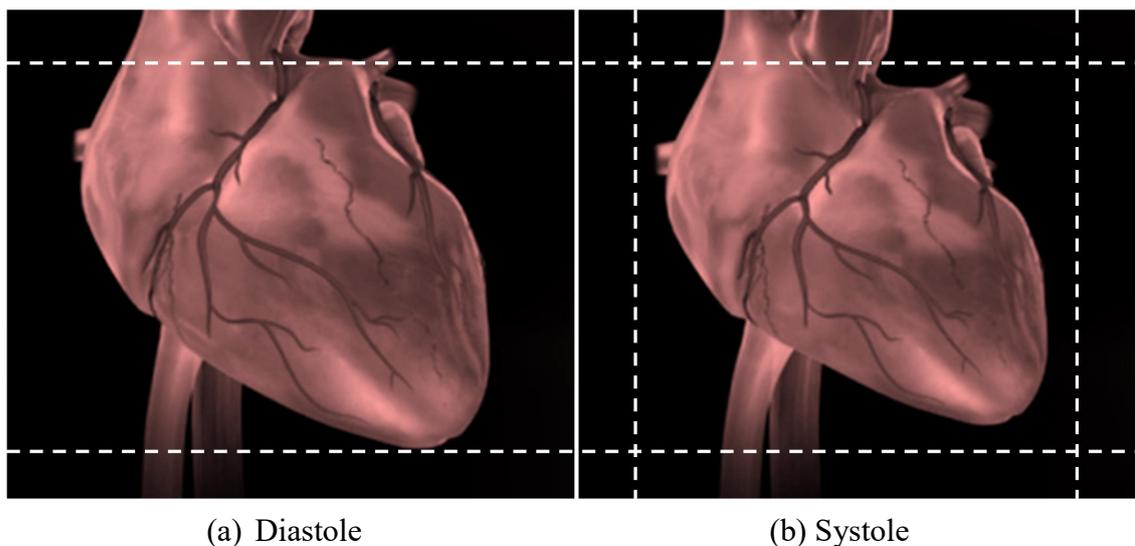


Fig.5-1 Volume of heart at the diastole and systole.

図 5-1 のように，心臓は全身に血液を送る収縮期（Systole）の最後にその容積が最小となり，そこから徐々に容積を増やしていく拡大期（Diastole）となり，容積が最大になった時点から再び全身に血液が送り出され容積が減り始める収縮期となる，という周期的な拍動運動をしている．図中の白点線は拡大期の最大容積を取るタイミングでの，心臓最外部の位置を表している．このため，心臓の外壁上にある冠動脈もこの運動に伴い位置が移動するため，内部の流れもその移動の影響を受けていると推測できる．具体的には心臓容積は最大で約 130ml，最小で約 65ml である<sup>[5-1]</sup>．

冠動脈内の流れをシミュレーションにて解明しようとする研究は，実際の冠動脈形状を用いたもの<sup>[5-2]</sup>、<sup>[5-3]</sup>や手術に用いるステント形状の影響を確認するためのものが多く<sup>[5-4]</sup>，この拍動運動の影響について考慮した冠動脈内部流れについての研究はほとんどない．本研究では心臓の拍動運動を，時間的に拡大・縮小運動する球によってモデル化し，その球上に沿って冠動脈を模擬した円管を

置き内部流れをシミュレーションすることによって，冠動脈内部の流れが受ける拍動運動の影響を調べることを目的とした．

## 5-2. 計算領域

図 5-2 に計算領域を示す.

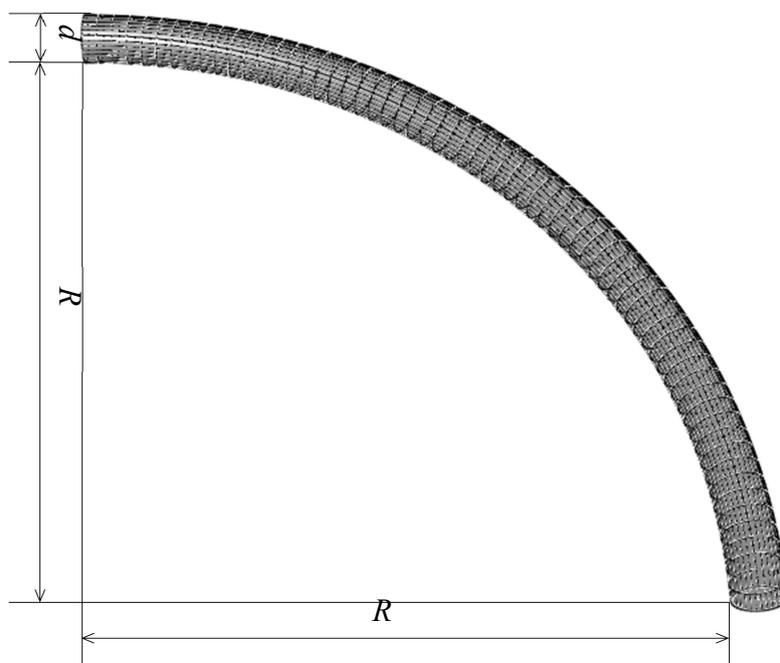


Fig. 5-2 Calculation field.

図中,  $R$  は心臓をモデル化した球の半径であり, 心臓の拍動に合わせて時間的に変化する. 今回は入口流速と同期して, 心臓の半径も変化するものとした. また,  $d$  は球の上に置かれた管の直径であり, 球の拡大・縮小に合わせて管内の体積を一定に保つように時間的に変化するものである.

### 5-3. 支配方程式

これまでと同様に，支配方程式は連続の式とナビエ・ストークス方程式である．

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2-1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\text{grad } p + \frac{1}{\text{Re}} (\Delta \mathbf{v}) \quad (5-1)$$

本研究の格子は時間的に変化するので，以上の式を，2-5，2-6 で示した時間項を含めた一般座標変換をして計算した．

#### 5-4. 計算条件

管入口から図 2-6 と同じ入口流速を与え，出口では速度勾配=0 とした．また，図 5-2 中の  $R$  と  $d$  も流速に合わせて変化するものとし， $R$  は 12.5~15.1， $d$  は 0.92~1.0 の間で時間的に変化させた．

計算には 2-3 で説明したフラクショナルステップ法を用い，圧力のポアソン方程式のために 2-4 の SOR 法を用いた．

格子数は  $32 \times 64 \times 64$  とし，時間刻みは  $1.0 \times 10^{-5}$  で計算した．流体の物性はこれまでと同じく密度  $\rho = 1050 \text{ kg/m}^3$ ，粘度  $\mu = 0.0035 \text{ Pa}\cdot\text{s}$  とした．

### 5-5. 計算結果

円管内の流れが受ける，球の拡大・縮小の影響について検討するために，（条件 1）球を拡大収縮させない（条件 2）球を拡大収縮させる，という 2 パターンを計算した．どちらの場合も円管入口からは図 2-6 の振動流が流入している．

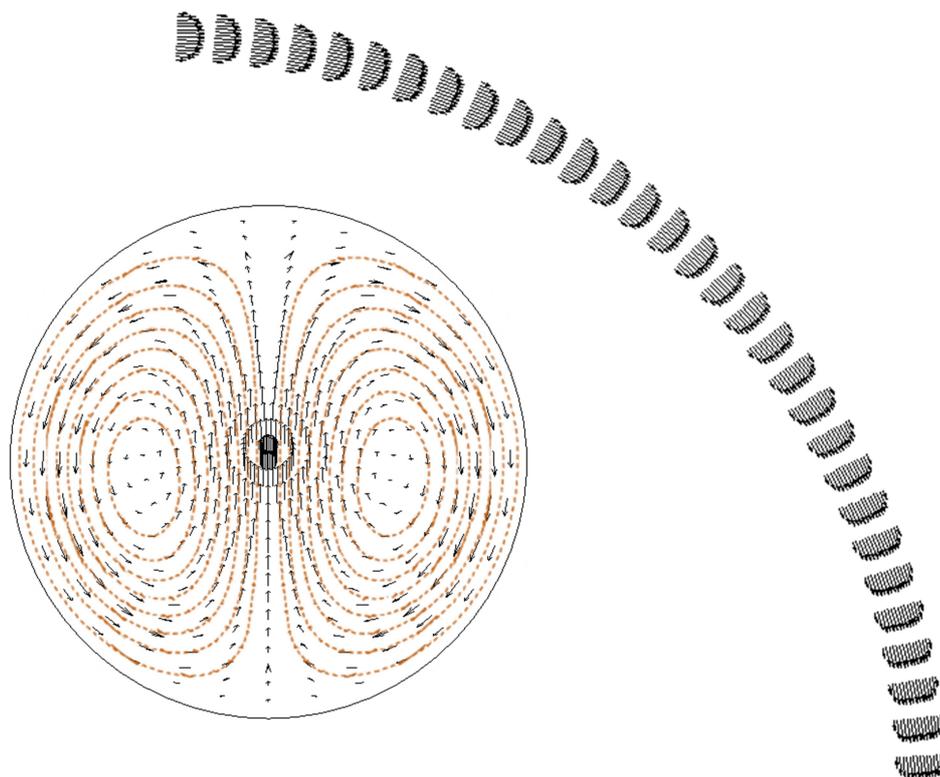


Fig. 5-3 Velocity vectors in condition 1 (without expansion and contraction) .

図 5-3 に，条件 1 における時刻 0.1 での主流方向の速度ベクトルと，長手方向の中心位置における管断面内の速度ベクトルを示す．この図より，管入口からの流れが出口まで伝達され，管の曲がりによって断面内に 2 次流れが発生していることが分かる．この 2 次流れの図を過去の研究の理論値<sup>[5-5]</sup>（図中赤線）と比較したところ，ほぼ一致していることが分かったため，本計算の結果は妥当であると判断した．

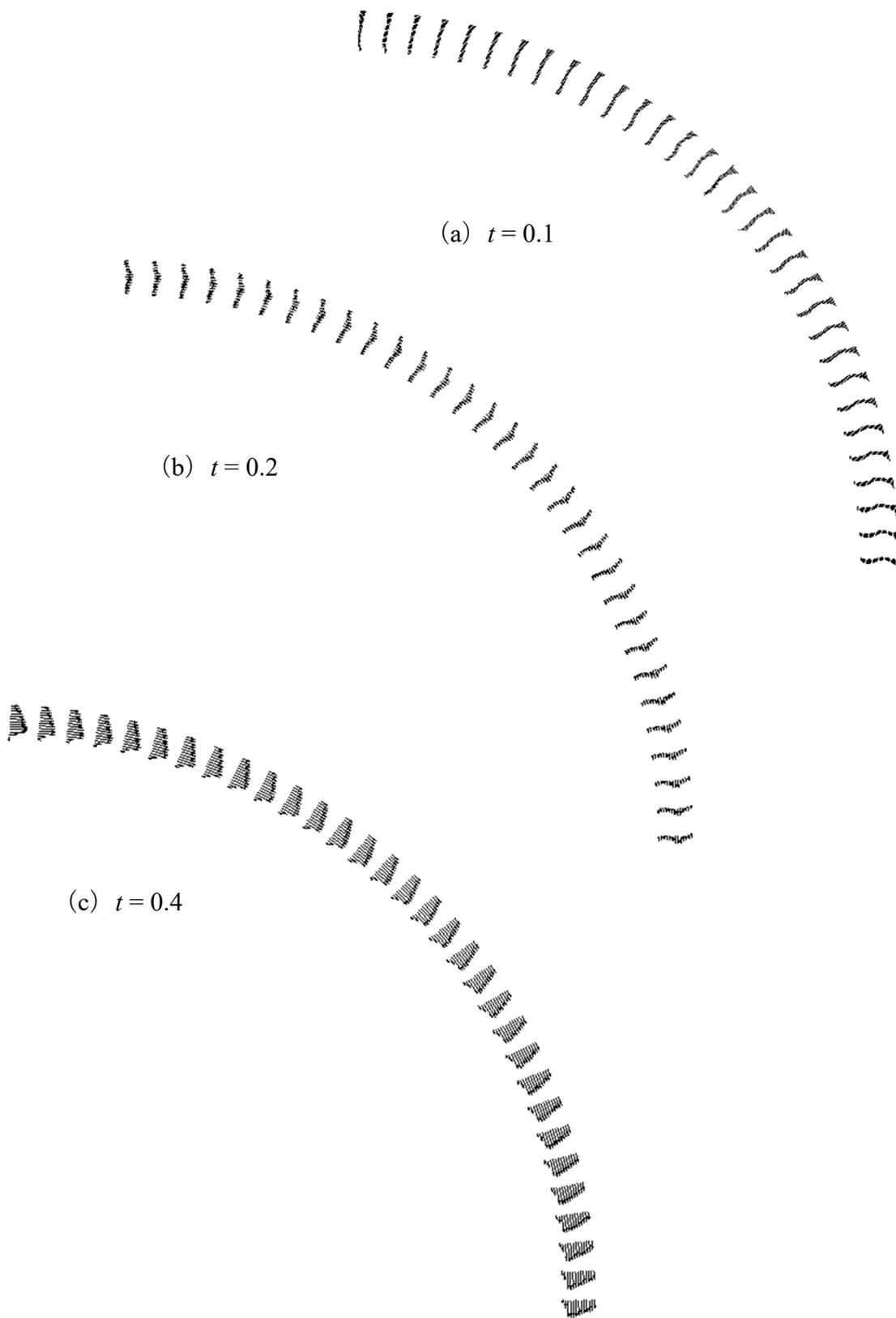


Fig.5-4 Velocity vectors in condition 2 (with expansion and contraction ) .

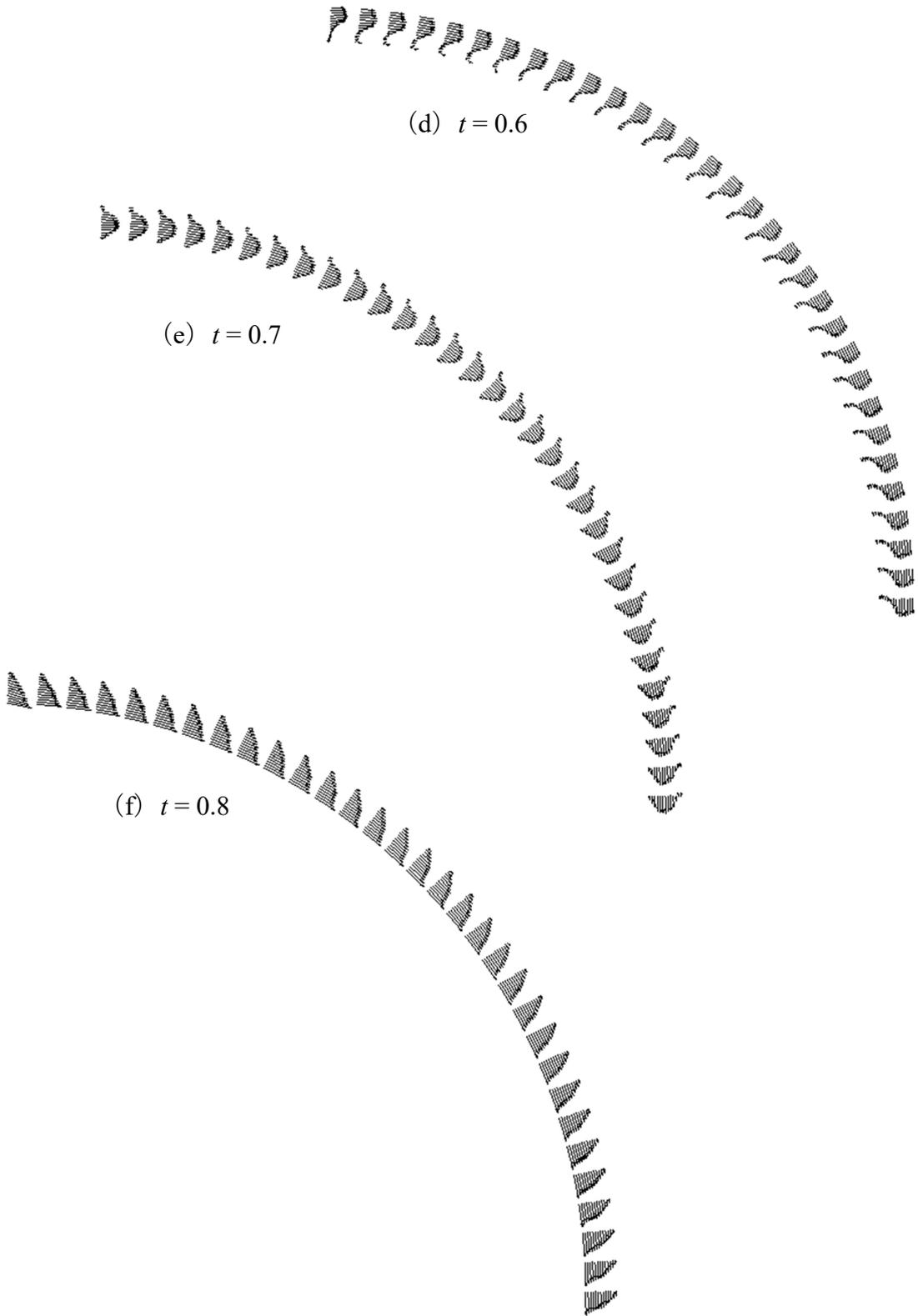


Fig.5-4 Velocity vectors in condition 2 (with expansion and contraction ) .

図 5-4 に主流方向の速度ベクトル図を示す。円管が乗っている球の径は、図 2-6 に示した入口流速と同期して拡大縮小するので、時刻 0.1 にて流速、球径ともに最小となったのち、徐々に大きくなっていく。時刻 0.4, 0.6 付近では、共に入口流速と球径が極小値を取るため、管曲がり方向に対して内側の速度ベクトルが小さくなっていることが分かる。逆に時刻 0.7 では徐々に入口流速と球径が大きくなっていく段階なので、内側から押されて外側の速度ベクトルが相対的に小さくなっており、極大値に近い時刻 0.8 では内側に大きく偏った速度ベクトル分布となっている。

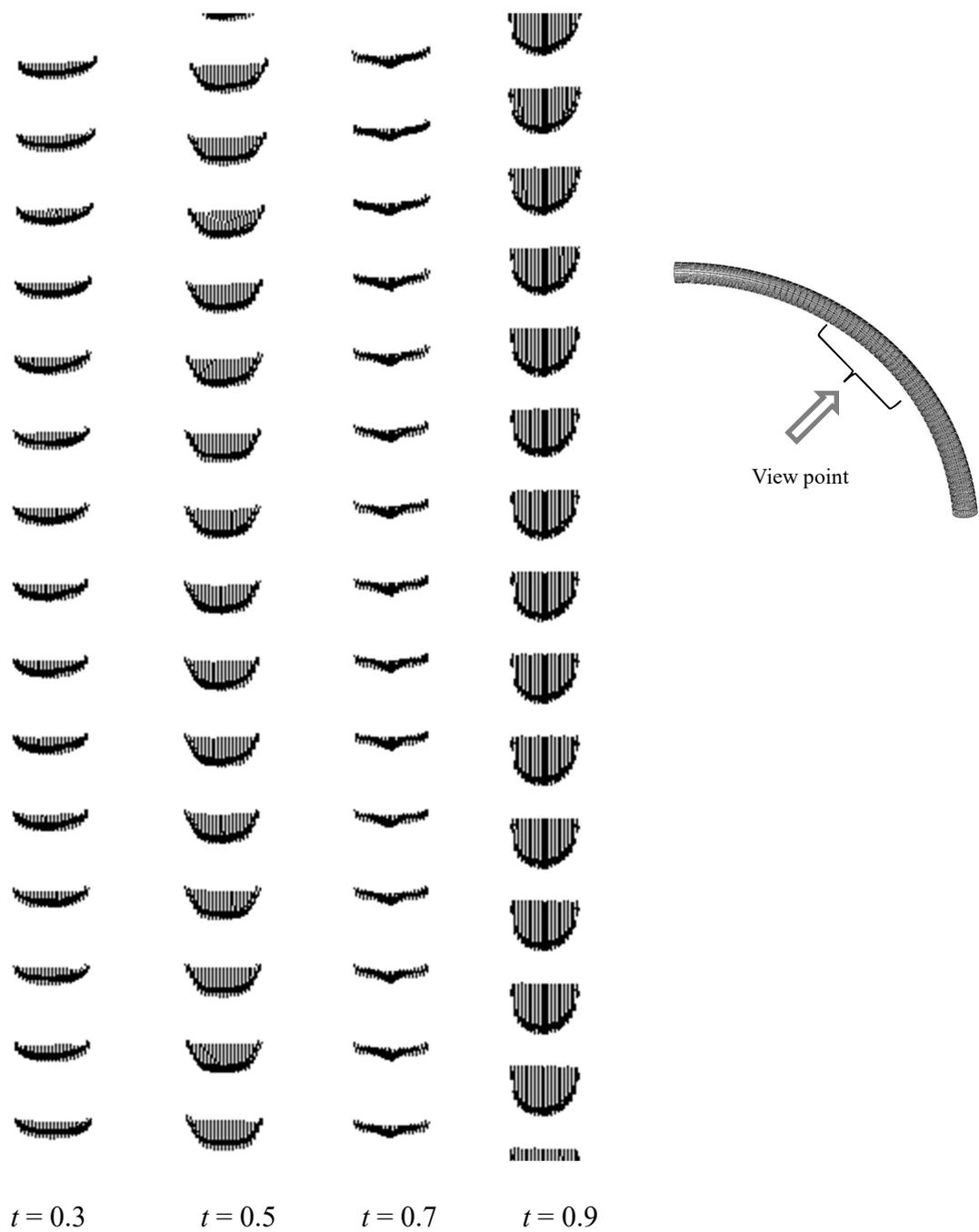
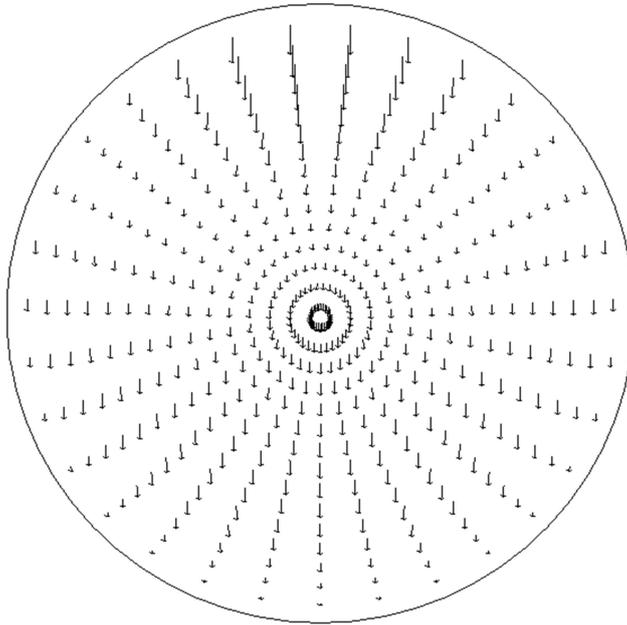
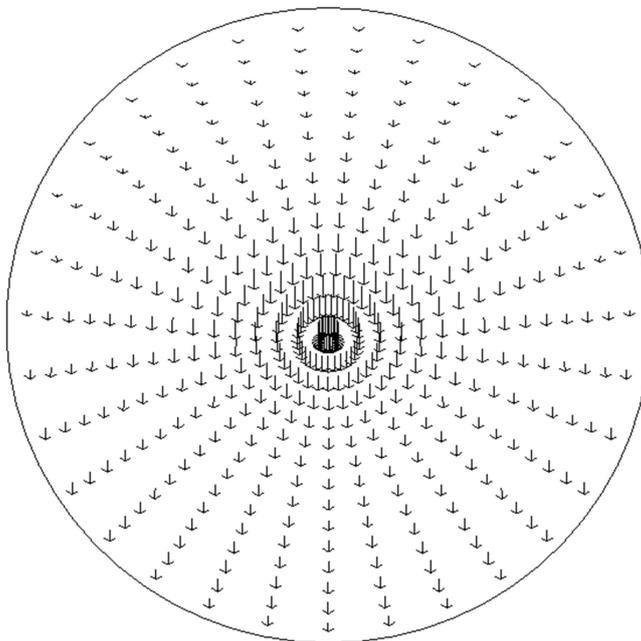


Fig.5-5 Velocity vectors from the view point of inner of the sphere.

図 5-5 に球の内側から円管長さ方向の中心付近の速度ベクトルを示す。時刻によってベクトルの数が異なるのは、球の拡大縮小運動によって時刻ごとに格子間隔が異なるためである。こちらの速度ベクトル図は図 5-4 と異なり、球の拡大縮小運動の影響による偏りは見られない。

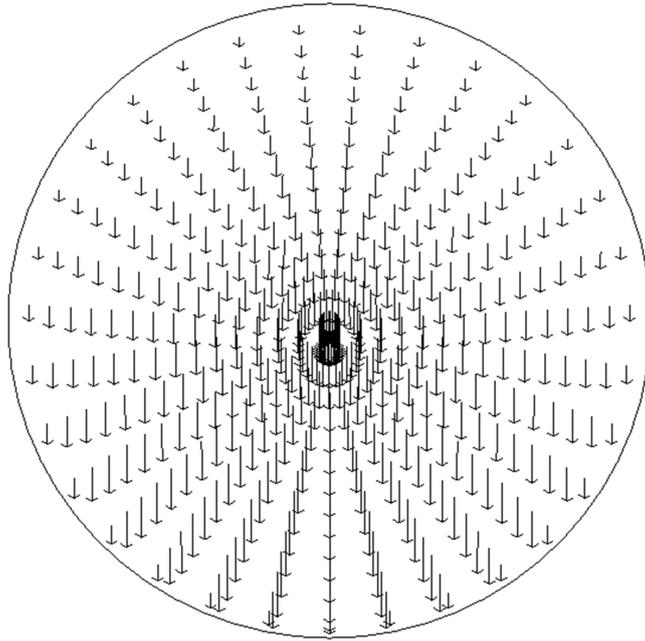


(a)  $t = 0.1$

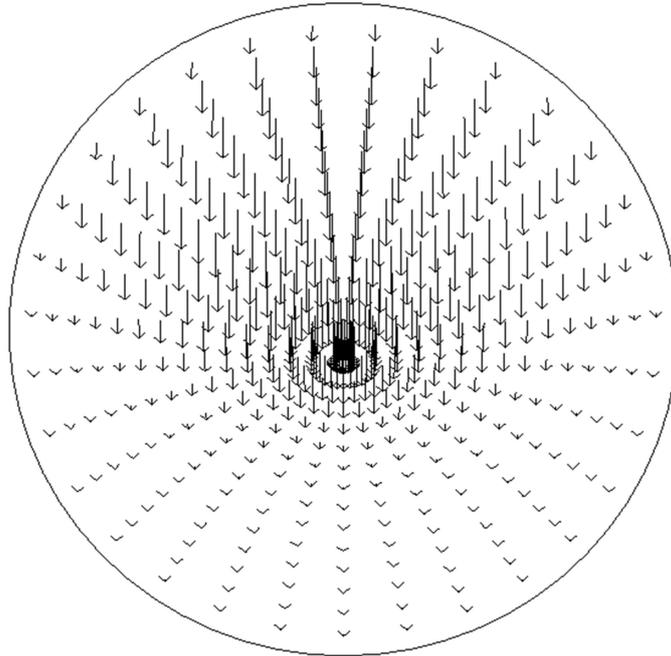


(b)  $t = 0.2$

Fig. 5-6 Velocity vectors in cross sectional area at the center of main stream direction  
 (Upper : Outside of bending , Lower : Inside of bending) .



(c)  $t = 0.4$



(d)  $t = 0.6$

Fig. 5-6 Velocity vectors in cross sectional area at the center of main stream direction  
 (Upper : Outside of bending , Lower : Inside of bending) .

図 5-6 に主流方向に対して中心位置（曲がりの真ん中）における管断面内の速度ベクトルを示す。時刻 0.4 と 0.6 ではどちらも球径が極小値を取ろうとしているタイミングであるため、管曲がり方向の内側に向かう流れとなっている。特に時刻 0.6 では管曲がり部の外側のベクトルと内側のベクトルの大きさに差があることが分かる。

図 5-3 に示したような断面内の 2 次流れが現れなかったのは、球の移動によって受ける影響が大きく、球の移動方向に断面内の流れが引きずられているためと考えられる。

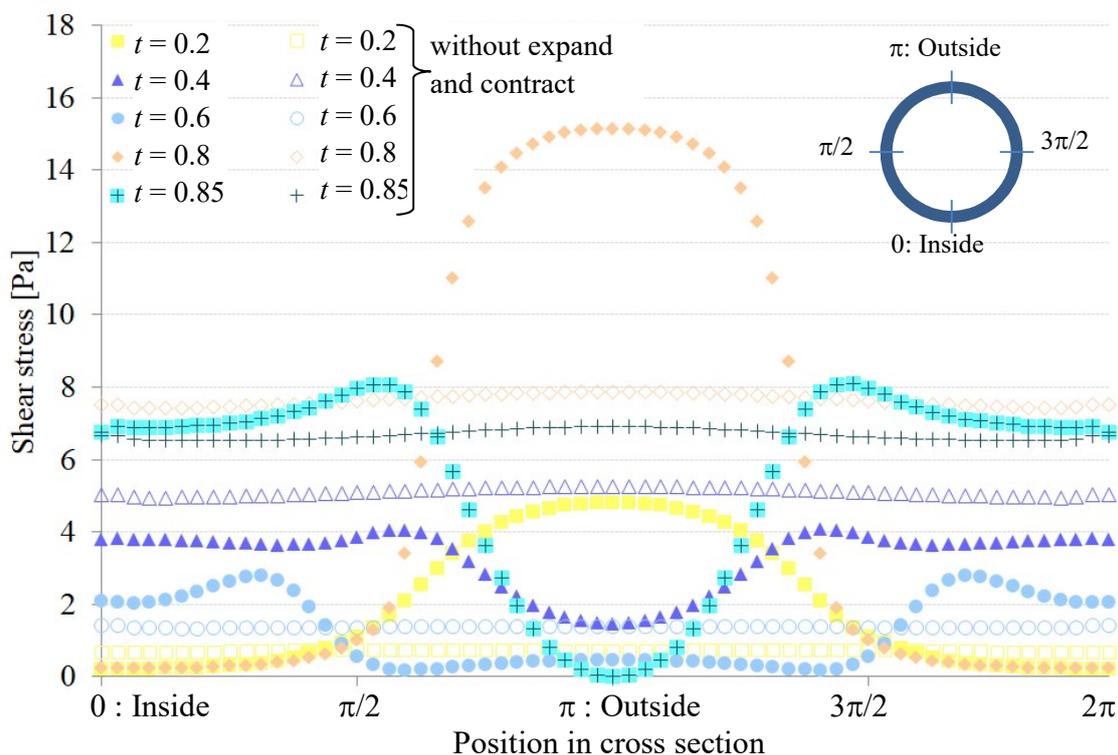


Fig. 5-7 Comparison of shear stress between the case with and without motion of the sphere.

図 5-7 に主流方向に対して中心位置の断面内せん断応力の分布を示す。横軸は断面内の位置を示しており、0 が管曲がり部の内側、 $\pi$  が外側の位置を表している。塗りつぶされているマーカは球が拡大縮小運動する場合、塗りつぶされていないマーカが球は運動をしない場合の値である。球が拡大縮小しない場合は、全体的にほぼ一定か外側の壁付近でせん断応力値が少し（約 5%）大きくなる程度の変化である。

それに対し、球が拡大縮小する場合は、断面内においてせん断応力分布に大きな偏りがあることが分かる。ここに示した時刻では、円管が乗った球の拡大収縮運動の方向が変化するタイミングであるため、前の時刻の流れから反対方向に向かう流れが発生し、せん断応力分布もこのように複雑になる。

また、球が拡大する時刻 ( $t = 0.2, 0.85$ ) においては外側に向かってせん断応力値が拡大しているのに対し、球が収縮する時刻 ( $t = 0.4, 0.6, 0.8$ ) においては断面横 ( $\pi/2, 3\pi/2$ ) 近くでせん断応力値が急上昇していることが分かる。

## 5-6. 結論

拡大縮小する球上に円管を置き円管内部の流れをシミュレーションすることによって、冠動脈が受ける心臓の拍動運動の影響を調べた結果、以下の結論を得た。

- (1) 球の拡大縮小により、円管内部の流れが影響を受けることが分かった。
- (2) 動脈硬化の原因といわれるせん断応力分布にも影響を与え、球の拡大期と収縮期の間で、断面内の分布が大きく異なっていることが分かった。

## 参考文献

- [5-1] Steven E. Lucking, Frank A. Maffei, Robert F. Tamburro, Neal J. Tohmas, Pediatric Critical Care Study Guide: Text and Review, Springer, (2012)
- [5-2] Thomas Frauenfelder, Evangelos Boutsianis Thomas Schertler, Lars Husmann, Sebastian Leschka, Dimos Poulidakos, Borut Marincek and Hatem Alkadhi, In-vivo flow simulation in coronary arteries based on computed tomography datasets: feasibility and initial results, European Radiology, vol.17 (5) , (2007) , p.1291-1300
- [5-3] Karl Perktold and Gerhard Rappitsch, Computer simulation of local blood flow and vessel mechanics in an compliant carotid artery bifurcation model, Journal of Biomechanics , vol.28 (7) , (1995) , p.845-856
- [5-4] Joel L. Berry, Aland Santamarina, James E. Moore Jr., Suranjan Roychowdhury, William D. Routh, Experimental and Computational Flow Evaluation of Coronary Stents, Annals of Biomedical Engineering, vol.28 (4) , (2000) , p.386-398
- [5-5] D. J. Mcconalogue and R. S. Srivastav, Motion of a fluid in a curved tube, Proceedings of Royal Society of London A, vol. 307, (1968) , p. 37-53.

## 第 6 章

### 総括

本論文では、川崎病にかかった心臓冠動脈内部の状態を明らかにすることを目的とし、壁面超弾性と心臓の拍動運動をモデル化することによって、その影響について検証し、以下のことを示した。

- (1) ◆単純な粘弾性ではなく、超弾性を与えるべきであることが分かった。
  - ◆壁面超弾性の有無の場合について比較することにより、両者の流れとせん断応力傾向について大きな違いがあることが分かった。
  - ◆壁面超弾性を与えて数値計算することにより、壁が流れを受けて変形していく様子を捉えることができた。

以上より、壁面超弾性を考慮した数値計算をすることに必要性を示した。

- (2) ◆心臓の拍動運動によって、血管内部の流れが大きく影響を受けることが分かった。

以上より、冠動脈内部の流れについて検証する際は、拍動運動によって移動させられている影響を考慮する必要性を示した。



# 謝辞

本論文を執筆するにあたり、5年前研究室に受け入れて下さった河村哲也教授に感謝いたします。修士修了後、会社員として過ごし、その後約2年間子育てをしていた私が研究生活に復帰できたのは、ひとえに河村教授の懐の広さによるものです。また研究を進め、論文を執筆するうえでも、理事、専攻長などの職務多忙の中、的確なアドバイスをして頂きました。

また、河村研究室 OG であり前 情報基盤センター講師、現 群馬大電子情報理工学科 桑名杏奈助教には、プログラム作成上のアドバイスを頂き、研究室運営についても支えて頂きました。

河村研究室学生の皆様には、いつも明るい話題を提供していただき、遅めの学生生活を楽しく過ごすことができました。

大学附属いずみナーサリーの職員の皆様には、つねに温かく接して頂き、一人目に引き続き二人目を育てながらの研究生活を支えて頂きました。

最後に、困難な中でも子育てと研究をなんとか両立させて来られたのは夫と二人の子供のおかげです。ありがとうございました。