

平成25年度博士学位論文  
母関数法を用いた量子ウォークの解析

お茶の水女子大学大学院 人間文化創成科学研究科  
理学専攻 物理科学領域 出口研究室

遠藤（渡邊）隆子

平成26年3月

指導教員 出口哲生

# 目次

|       |                  |    |
|-------|------------------|----|
| 第1章   | 序論               | 4  |
| 1.1   | はじめに             | 4  |
| 1.2   | 本研究の動機           | 5  |
| 1.2.1 | Wojcik モデルの極限定理  | 6  |
| 1.2.2 | 二相系量子ウォークの極限定理   | 6  |
| 1.3   | 本論文の構成           | 7  |
| 第2章   | 1次元離散時間量子ウォーク    | 8  |
| 2.1   | 古典ランダムウォーク       | 8  |
| 2.1.1 | 1次元2状態古典ランダムウォーク | 8  |
| 2.1.2 | 再帰確率             | 10 |
| 2.1.3 | 古典ランダムウォークの極限定理  | 12 |
| 2.2   | 量子ウォークとは         | 13 |
| 2.2.1 | 全空間              | 13 |
| 2.2.2 | 量子ウォークの定義        | 14 |
| 2.2.3 | 時間発展と確率分布        | 16 |
| 2.3   | 量子ウォークの測度        | 18 |
| 2.4   | 量子ウォークの性質        | 19 |
| 2.4.1 | 局在化              | 19 |
| 2.4.2 | 弱収束の極限定理         | 21 |
| 2.4.3 | ユニバーサルリティクラス     | 22 |
| 第3章   | 時空間母関数法          | 23 |
| 3.1   | 設定               | 23 |
| 3.2   | パスの重みの母関数        | 24 |
| 第4章   | 本論文の先行研究         | 31 |
| 第5章   | Wojcik モデルの極限定理  | 35 |
| 5.1   | 研究背景             | 35 |
| 5.2   | 研究内容             | 36 |
| 5.2.1 | モデル              | 36 |
| 5.2.2 | 時間発展             | 37 |
| 5.3   | 研究結果             | 37 |

|                         |                                 |           |
|-------------------------|---------------------------------|-----------|
| 5.3.1                   | 原点における時間平均極限測度                  | 37        |
| 5.3.2                   | 命題 3 の証明                        | 40        |
| 5.3.3                   | 命題 4 の証明                        | 44        |
| 5.3.4                   | $x \in \mathbb{Z}$ における時間平均極限測度 | 51        |
| 5.3.5                   | 定理 9 の証明                        | 52        |
| 5.3.6                   | 定常測度                            | 63        |
| 5.3.7                   | 系 2 の証明                         | 64        |
| 5.4                     | 研究考察                            | 70        |
| 5.4.1                   | 先行研究との対応                        | 70        |
| 5.4.2                   | CGMV 法による結果との整合性                | 71        |
| 5.4.3                   | 時間平均極限測度と定常測度の対応                | 72        |
| 5.5                     | 本章のまとめと今後の展望                    | 73        |
| <b>第 6 章 二相系量子ウォークの</b> |                                 |           |
|                         | 極限定理                            | <b>74</b> |
| 6.1                     | 研究背景と研究目的                       | 74        |
| 6.2                     | 研究内容                            | 75        |
| 6.2.1                   | モデル                             | 75        |
| 6.2.2                   | 時間発展                            | 75        |
| 6.3                     | 研究結果                            | 76        |
| 6.3.1                   | 時間平均極限測度                        | 76        |
| 6.3.2                   | 定理 11 の証明                       | 77        |
| 6.3.3                   | 定常測度                            | 84        |
| 6.3.4                   | 定理 12 の証明                       | 87        |
| 6.4                     | 研究考察                            | 93        |
| 6.4.1                   | シミュレーション結果との対応                  | 93        |
| 6.4.2                   | 時間平均極限測度と定常測度の対応                | 95        |
| 6.5                     | 本章のまとめと今後の展望                    | 95        |
| <b>第 7 章 総括</b>         |                                 |           |
| 7.1                     | 本論文のまとめ                         | 96        |
| 7.2                     | 今後の研究の方向性                       | 97        |
| <b>引用文献</b>             |                                 |           |
|                         |                                 | <b>97</b> |

## 記号

本論文で用いる記号とその意味を以下に挙げる .

- $\mathbb{Z}$ : 整数全体の集合
- $\mathbb{R}$ : 実数全体の集合
- $\mathbb{C}$ : 複素数全体の集合
- $T$ : 転置作用素
- $i$ : 虚数単位
- $O(\cdot)$ : オーダー量
- $|\cdot\rangle$ : ケットベクトル
- $\langle\cdot|$ : ブラベクトル

# 第1章 序論

## 1.1 はじめに

ランダムウォークが株価の変動 [36, 46], 拡散問題 [46], そして高分子の幾何学的構造 [9] など日常の多くの現象を記述し解析するのに重要な役割を担ってきたことはよく知られている. 近年「量子ウォーク」はランダムウォークの量子版として量子系で同等の立場になることが期待されており, 様々な側面から研究が行われている.

量子ウォークは, 1988 年に量子確率論の立場から Gudder [13] により導入された. その後, Gudder とは独立に量子情報, 量子セルオートマトンなどいくつかの異なる視点から量子ウォークが導入された [1, 2, 30].

量子コンピュータへの応用の観点から, グローヴァーのアルゴリズム [12] など量子力学に基づいた量子探索アルゴリズムに対し, 量子ウォークを応用した研究もいくつか行われている [3, 39]. 尚, グローヴァーのアルゴリズムは, 完全グラフ上における量子ウォークを用いた量子探索アルゴリズムとみなすことが出来る. グラフの同型問題にも量子ウォークが応用されている [6]. また, 光合成のクロロフィル間上のエネルギーの移送効率の問題をあるネットワーク上の連続時間量子ウォークに置き換えることにより計算され, 実験で得られていた結果と一致することが確認された [31]. そして, 量子統計物理学への応用としては, Oka *et al.* [34] による強相関電子対への応用や, 近年多くの物理学者に注目されているトポロジカル絶縁体への応用 [18] がある. 特に, トポロジカル絶縁体の研究は, 本論文の「二相系の極限定理」の先行研究にもなっている. さらに, イオントラップされた原子を用いる方法 [50] をはじめとして, 量子ウォークのいくつかの実験的な実現方法も確立されている [16, 37, 38].

量子ウォークには離散時間と連続時間のモデルがあり両者の関係が調べられてきたが, 古典ランダムウォークに比べて解明されていない点が非常に多い. 1998 年に Farhi *et al.* [10] により導入された連続時間の量子ウォークは, 時間発展の規則がシュレディンガー方程式によって記述されるため量子散乱をはじめとする物理現象との対応が考えられる. また, 連続時間量子ウォークは離散時間量子ウォークと比べてグラフなどのネットワーク上で容易に構成することが出来る. そのため, スケールフリーネットワークなどの複雑ネットワーク上での数値計算結果がいくつかある [32, 48, 49]. これに対して, 離散時間量子ウォークは複雑ネットワーク上における構成することが容易ではなく, 現在顕著な研究結果はほとんどない. しかし, 量子コンピュータの発展に伴い複雑ネットワーク上における離散時間量子ウォークの数値的, および厳密な解析は共に今後必要になってくることが予想される. 尚, 量子ウォークのレビューとして, [17, 20, 22, 35, 44, 45] などがある.

近年, 量子ウォークの理論研究も活発に行われている. 特に, 量子ウォークの漸近挙動を解明

することは重要なテーマの一つとなっている．離散時間量子ウォークには，古典系のランダムウォークには見られない顕著な性質が存在する．まず，量子ウォーカーが出発点付近に高い確率で見つかる「局在化」が挙げられる [25]．局在化は数学的には，時間が十分に経過したときに量子ウォーカーが出発点に戻ってくる確率が正になることで定義される．続いて，量子ウォーカーが線形的に拡散することが挙げられる [45]．

古典系では標準偏差が  $O(\sqrt{t})$  で発散するのに対して，量子ウォークでは  $O(t)$  で発散する．尚， $t$  は時刻とする．そして逆釣鐘型の確率分布をすることである [45]．これら量子ウォークに特有の性質は，量子ウォーカーが古典ランダムウォーカーよりも遠くへ拡散しやすく，局在化により安定して目的の点を特定できることを示しており，量子ウォークが古典ランダムウォークよりも遥かに探索に適していることが分かる．

量子ウォークの漸近挙動の特性は数学的には，弱収束極限測度によって記述される [25]．2013年，原点のみユニタリ行列が異なる 1 次元離散時間量子ウォークに対して弱収束極限測度が解析的に厳密に導出された．但し，そのユニタリ行列には全ての場所において行列式が不変であるという条件が課されている．Konno *et al.* [25] によれば，弱収束極限測度は局在化に対応する項と拡散に対応する項の和の形で書かれる．本論文の研究では，空間的に非一様な 1 次元離散時間量子ウォークの局在化に対応する数学的表式に着目する．尚，局在化に対応する項は，時間平均極限測度を用いて記述される．

現在，1 次元系離散時間量子ウォークでは，原点のみユニタリ行列が異なる量子ウォークと 3 状態のグローヴァーウォーク以外は，局在化に関する厳密な解析結果が存在しない．

他方，最近の研究により，量子ウォークから一様測度などいくつかの測度を構成出来ることが分かってきた [25, 26]．その一つに「定常測度」があるが，1 次元系のいくつかの量子ウォークに対しては時間平均極限測度と定常測度は互いに深く関係する [25]．従って，時間平均極限測度と定常測度の関係を明らかにすることは，量子ウォークの局在化の解析に対して非常に重要な意義がある．尚，時間平均極限測度の導出方法として，本研究でも用いる時空間母関数法 [25] や，CGMV 法 [4]，パスの方法 [23] がある．但し，CGMV 法とパスの方法は原点における時間平均極限測度しか求めることが出来ない上，CGMV 法は適用できるモデルが非常に少なく，パスの方法は解析が煩雑である．時空間母関数法は，1 次元系の原点のみユニタリ行列が異なり，その行列式が場所に関して不変であるような量子ウォークに対しては厳密な解析手法であるが，その他の空間依存型量子ウォークに対してはその有効性の真偽は定かではない．定常測度を求める方法はいくつかあるが，近年量子ウォークの解析手法，特に無限次元行列の固有値問題の解法として着目されるようになってきた分離型母関数法 [25] がある．分離型母関数法もまたどのような量子ウォークの解析に用いることが出来るか，明らかにされていない．

## 1.2 本研究の動機

本研究は量子ウォークに特有の性質である局在化を数学的に記述する測度を複数の母関数法を用いて求め，局在化を検証することで量子ウォークの漸近挙動の解析に新しい示唆を与えるものである．本研究では，1 次元系においてこれまで局在化を表す数学的な表式が得られていなかった量子ウォーカーの挙動が場所に依存する空間的に非一様な 2 種類の量子ウォークに着

目した．そして，それらの具体的な量子ウォークに対して母関数を用いて解析することで，非一様量子ウォークの局在化を厳密に解析する手法の構築につなげることを目指した．そのために大きく分けて以下の2つの研究を行った．

一方，量子ウォークには「クラス」が考えられる [25]．量子ウォークから構成される様々な測度同士の間を明らかにすることは，量子ウォークのある種のクラスの構成につながることで期待される．また，測度同士の定性的な関係は，対応する諸現象に対する何らかの性質を表しており，量子統計物理学や量子情報学への応用の観点からも非常に重要な意義があると考えられる．このように，測度論の観点からも量子ウォーク，および対応する諸現象を深く理解することが出来る，と期待される．

### 1.2.1 Wojcik モデルの極限定理

Wojcik *et al.* [47] は，量子ウォーカーの挙動が場所に依存しない1次元アダマールウォークに1点だけ不純物を付加すると，著しく局在化が起こることを説明した．本論文では，この量子ウォークを「Wojcik モデル」と呼ぶことにする．彼らの研究では，固有値問題

$$(U^{(s)})^2 \Psi = \lambda \Psi \quad (\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1)$$

を漸化式を用いて解き，シミュレーションによって Wojcik モデルの局在化を解析したが，局在化を表す厳密な表式は与えられていない [47]．但し， $U^{(s)}$  は，Wojcik モデルの時間発展を決定する  $\infty \times \infty$  のユニタリ行列である．彼らは，2ステップ毎の時刻に着目している．Wojcik モデルは原点のみユニタリ行列が異なる量子ウォークでその行列式は原点のみ他の場所と異なる．時空間母関数法は，原点のみユニタリ行列が異なる量子ウォーク，特にそのユニタリ行列の行列式が空間に依存しないと仮定しているため，Wojcik モデルのような空間的に非一様な量子ウォークに対する極限定理は本研究が行われるまで得られていなかったことになる．

このような背景から，はじめにパスの方法 [23] や時空間母関数法をはじめとするいくつかの組み合わせ論的手法や母関数法を用いて時間平均極限測度を求めることで，局在化を数学的に記述することを目指した．続いて Wojcik モデルに対する固有値問題

$$U^{(s)} \Psi = \lambda^{(\omega)} \Psi \quad (\lambda^{(\omega)} \in \mathbb{C}, |\lambda^{(\omega)}| = 1) \tag{1.1}$$

を分離型母関数法を用いて解き，定常測度を求め時間平均極限測度との関係を明らかにすることで，原点に不純物を持つ対称な非一様量子ウォークの局在化の解析方法の改善，構築につなげることを目指した．

### 1.2.2 二相系量子ウォークの極限定理

第1.2.1節の繰り返しになるが，1次元系において空間的に非一様な量子ウォークの極限定理として厳密な結果が得られているのは，ユニタリ行列の行列式が空間に依存しない原点のみユニタリ行列が異なる量子ウォークに対してのみであった [25]．

このような背景から，原点のみユニタリ行列が異なる量子ウォークを最も自然に非対称化したモデルの1つとして，原点を境界に正負の領域でそれぞれ量子ウォーカーが異なる挙動をする量子ウォークを提案した．この量子ウォークを「二相系量子ウォーク」と呼ぶことにする．そして，時空間母関数法により時間平均極限測度を求めることで二相系量子ウォークの局在化を記述する数学的表式を得ることをまず目指した．続いて，分離型母関数法を用いて二相系量子ウォークの定常測度を求め時間平均極限測度との関係を明らかにすることで，原点に関して非対称性を持つ量子ウォークの局在化の解析方法の改善，構築につなげることを目指した．また，二相系量子ウォークは，近年量子統計物理学で着目されているトポロジカル絶縁体とも深く関わることが分かってきた [18].

### 1.3 本論文の構成

本論文の構成は以下の通りである．まず，第2章で1次元上の離散時間量子ウォークについてまとめ，第3章では本研究でも用いた時空間母関数法を解説する．時空間母関数法は本研究の背景にある重要な量子ウォークの解析手法なので，パスの数え上げから局在化の定理の導出まで丁寧に解説する．第4章では，本論文全体の先行研究を紹介する．第5章で Wojcik モデルの極限定理について，第6章では二相系量子ウォークについての研究の詳細をまとめる．第6章は本論文のまとめとなっている．



## 第2章 1次元離散時間量子ウォーク

量子ウォークは、1988年に Gudder [13] により量子確率論のモデルとして導入された。その後、1996年に Gudder とは独立に Meyer [30] が量子セルオートマトンとして離散時間量子ウォークを導入した。そして、2001年に量子情報の視点から Ambainis *et al.* [2] により再導入されその性質が詳しく研究されたことが、量子ウォークが着目される発端になったと考えられている。量子ウォークは特に古典ランダムウォークの量子版とも考えることができる [1]。本章では、はじめに量子ウォークの古典版でもあるランダムウォークの再帰確率と極限定理を解説する。続いて量子ウォークの中で最も活発に研究されており、本論文でも扱う1次元系における2状態の場合の量子ウォークについて古典ランダムウォークと比較しながら解説する。ここで、「2状態」とは最近接、即ち、右か左のどちらかに量子ウォーカーが移動し得ることをいう。尚、この章は、参考文献 [14, 22, 29, 40, 41, 42, 43] をもとにした古典ランダムウォークと1次元離散時間量子ウォークについてのレビューである。詳細は、各文献を参照して頂きたい。

### 2.1 古典ランダムウォーク

この節では、量子ウォークの古典版でもあるランダムウォークについて簡単に解説する。「ランダム (random)」とは、「でたらめの」、「無作為の」、「法則性がない」という意味の状態を表す言葉である。酔っ払いの行動、気体分子の空間配置の問題、サイコロゲームや株価の変動など、ランダムな現象は我々の日常にもいたるところに存在する。例えば、酔っ払いはなぜ今この場所に居るかが分からず、いくつかある進行方向の選択肢の中からランダムに1つ選んで新たな1歩を踏み出しているとも解釈できる。このように、過去の経緯に影響されず、今の状態から次の状態へ確率的に以降するような現象の数理的なモデルをマルコフ連鎖という。古典ランダムウォークはマルコフ連鎖の中で最も基本的なモデルである。ここでは、古典ランダムウォークの再帰確率と極限定理を最も単純な1次元2状態の古典ランダムウォークを例にまとめる。

#### 2.1.1 1次元2状態古典ランダムウォーク

1本の道をふらふらと歩いている酔っ払いの動きを数理的にモデル化したもの、即ちウォーカーが左へ1歩動く確率が  $p$  で右に1歩動く確率が  $q$  であるような1次元2状態のモデルを考える。ここでは、ウォーカーは原点から出発し  $p$  や  $q$  は場所や時間によらず常に一定であると仮定する。

$X_t$ : ウォーカーが時刻  $t$  に存在する場所を表す確率変数とすると,  $X_t$  は  $\{-t, -t+2, \dots, t-2, t\}$  上の確率変数になる.

ここで,

$\{Z_t\}$ : 以下を満たす独立同分布の確率変数列とする.

$$P(Z_t = 1) = p, \quad P(Z_t = -1) = q.$$

実は,  $\{Z_t\}$  はベルヌーイ試行列である. このとき, ウォーカーの時刻  $t$  における位置は,

$$X_t = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_t, \quad X_0 = 0.$$

と  $\{X_i\}$  ( $1 \leq i \leq t$ ) の和で表される. このように,  $X_t$  の確率分布を調べるために, 一般的にベルヌーイ試行列の和が用いられる. こうして得られる離散時間確率過程  $\{X_t\}$  を「1次元2状態古典ランダムウォーク」という.

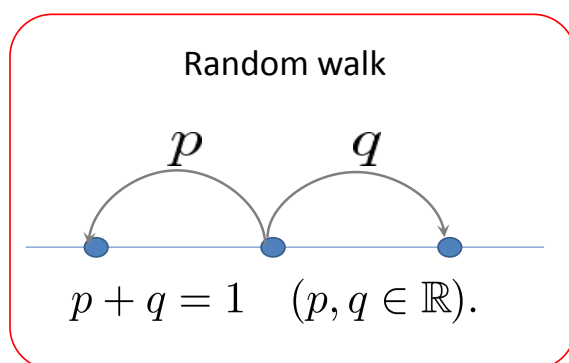


図 2.1: 古典ランダムウォークの概念図

ここで,  $X_t = x$  となる 1 つパスを考えると, 以下の事実が知られている.

定理 1. 古典ランダムウォーク  $\{X_t\}$  の分布は以下で与えられる:

$$P(X_t = x) = \binom{t}{l} p^l q^r.$$

但し,  $l, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

定理 2. 古典ランダムウォーク  $\{X_t\}$  の平均と分散は, それぞれ

$$\mathbf{E}[X_t] = (p - q)t, \quad \mathbf{V}[X_t] = 4pqt$$

となる.

各時刻  $t$  において, ランダムウォーカーの「見つかりやすさ」を表すのが確率変数  $X_t$  の確率分布である. 1次元2状態の古典ランダムウォークは平均の位置  $(p - q)t$  の周囲を彷徨うが, 時間が十分に経過すると, ランダムウォーカーの到達範囲が広がり分散も次第に大きくなる. また,  $X_t$  の確率分布は近似的に正規分布になる.

## 2.1.2 再帰確率

1次元系における古典ランダムウォークの再帰確率 (return probability) について簡単にまとめる．ここでの再帰確率とは，原点から出発したランダムウォーカーが有限時間内に初めて原点に戻る確率のことである．

注意：ランダムウォーカーが原点から出発して再び原点に戻ってくるのは，偶数ステップの後である．

$2t$  ステップの後に原点に戻る確率  $\tilde{p}(2t)$  は，

$$\tilde{p}(2t) = \frac{(2t)!}{(t!)^2} (pq)^t$$

となるが， $\tilde{p}(2t)$  は， $2t$  ステップの間にランダムウォーカーが原点に戻る場合を含んでいる．そこで，ウォーカーは原点から出発するので  $\tilde{p}(0) = 1$  であることに注意し， $2t$  ステップの後にランダムウォーカーが初めて原点に戻る確率を改めて  $\tilde{q}(2t)$  とおく．このとき，以下の関係が成り立つ．

$$\begin{aligned} \tilde{p}(2t) &= \tilde{q}(2)\tilde{p}(2t-2) + \tilde{q}(4)\tilde{p}(2t-4) + \cdots + \tilde{q}(2t-2)\tilde{p}(2) + \tilde{q}(2t) \\ &= \sum_{m=1}^t \tilde{q}(2m)\tilde{p}(2t-2m). \end{aligned} \quad (2.1)$$

式 (2.1) の第1項は2ステップ目に，第2項は4ステップ目に，最後の項は  $2t$  ステップ目にそれぞれランダムウォーカーが初めて原点に戻る場合を表している．2ステップ目にランダムウォーカーが原点に戻る場合は原点に戻る初めての場合であるから， $\tilde{q}(2) = \tilde{p}(2)$  であることに注意し，式 (2.1) に  $t = 1, 2, \dots$  を代入すると，以下のように  $\tilde{q}(2t)$  を  $\tilde{p}(2j)$  と  $\tilde{q}(2j)$  ( $1 \leq j \leq t$ ) で書き表すことができる：

$$\begin{aligned} \tilde{q}(2) &= \tilde{p}(2) \\ \tilde{q}(4) &= \tilde{p}(4) - \tilde{q}(2)\tilde{p}(2) \\ &\dots \\ &\dots \\ \tilde{q}(2t) &= \tilde{p}(2t) - \tilde{q}(2)\tilde{p}(2t-2) - \tilde{q}(4)\tilde{p}(2t-4) - \cdots - \tilde{q}(2t-2)\tilde{p}(2). \end{aligned}$$

ランダムウォーカーが原点から出発して少なくとも  $2T$  ステップまでに原点に戻る確率は，

$$F(2T) = \sum_{t=1}^T \tilde{q}(2t)$$

である．そして，この過程が「再帰的である」，「再帰確実である」とは，

$$\lim_{T \rightarrow \infty} F(2T) = 1$$

が成り立つときをいう。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F(2N) < 1$$

であるときは、「非再帰的である」または「過渡的である」という。また、このとき  $\tilde{q}(2t)$  ( $t \in \mathbb{N}$ ) は確率分布となり、

$$\langle 2t \rangle = \sum_{t=1}^{\infty} 2t \tilde{q}(2t)$$

は「平均再帰時間」を与える。

注意 :  $\lim_{N \rightarrow \infty} F(2N) < 1$  ならば、どんなに時間が経過してもランダムウォーカーが原点に戻ってこない確率が有限値に存在することになるが、決して原点に戻れない訳ではない。

ここで、1次元古典ランダムウォークの再帰性に関して以下の事実が知られている。

定理 3.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} F(2T) = 1 - |p - q| = \min\{2p, 2q\}.$$

即ち、原点に関して対称な  $p = q = 1/2$  のときだけ  $\lim_{T \rightarrow \infty} F(2T) = 1$  (再帰確実) となり、非対称な場合は  $\lim_{T \rightarrow \infty} F(2T) < 1$  (非再帰的) となる。1次元2状態古典ランダムウォークは対称なときだけ再帰的である、ということになる。原点对称性を持つ場合には、 $2t$  ステップの後にランダムウォーカーが原点に戻る確率は、

$$\tilde{p}(2t) = \binom{2t}{t} \left(\frac{1}{2}\right)^{2t} = \frac{(2t)!}{(t!)^2} \left(\frac{1}{4}\right)^t$$

となる。

次に、時刻  $t$  を無限に大きくしていったときに古典ランダムウォークが原点に再帰する確率が0に収束する速度を計算する。ここでは、以下のスターリング (Stirling) の公式を用いる。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t!}{t^t e^{-t} \sqrt{2\pi t}} = 1.$$

これより、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(2t)!}{(t!)^2} \frac{t^{2t} e^{2t} (2\pi t)}{(2t)^{2t} e^{-(2t)} \sqrt{2\pi(2t)}} = 1 \quad (2.2)$$

が導かれる。式 (2.2) より、 $p = q = 1/2$  の対称な古典ランダムウォークに対して、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{r_{2t}(0)}{1/\sqrt{\pi t}} = 1$$

が成り立つ．これより，対称な1次元古典ランダムウォークの再帰確率はべき指数  $1/2$  のオーダーで0に収束することがわかる．さらに， $0 < p < 1$  の一般の1次元古典ランダムウォークの場合も同様にして，

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{r_{2t}(0)}{(4pq)^t / \sqrt{\pi t}} = 1.$$

となる． $0 < 4pq < 1$  であることに注意すると，これは原点对称性を持たない場合は原点への再帰確率がべきよりも速く指数的に減少することを示している．

### 2.1.3 古典ランダムウォークの極限定理

1次元系2状態の古典ランダムウォークに対して成り立つよく知られた極限定理を2つ紹介する．まず，以下の大数の法則 (law of large numbers) が挙げられる．この法則には，「経験的確率が理論的確率と一致する」という意味がある．

定理 4. (大数の法則)

$\{X_t\}_{t=1,2,\dots}$  : 古典ランダムウォークとする．このとき，

$$P\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t} = q - p\right) = 1$$

が成り立つ．

次に，以下の中心極限定理が挙げられる．中心極限定理は，標本平均と真の平均の誤差を表す極限定理である．

定理 5. (中心極限定理)

$\{X_t\}_{t=1,2,\dots}$  : 独立同分布の古典ランダムウォークで，平均と分散はそれぞれ， $E[X_t] = m$ ， $V[X_t] = v \in (0, \infty)$  とする．

$$Y_t = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{j=1}^t (X_j - m)$$

とおくと  $Y_t$  は，平均0，分散  $v$  の正規分布に従う確率変数  $Y$  に (法則) 収束する．このとき， $-\infty < a < b < \infty$  なる  $a, b \in \mathbb{R}$  に対して，

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(a \leq Y_t \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2v} dx$$

が成り立つ．

*Proof.* 特性関数を用いた証明の概略を紹介する．

(1)  $X_t$  を平均0，分散1の確率変数にするために， $X_t - m/\sqrt{v}$  を新たに  $X_t$  とおく．

(2)  $Y_t$  の特性関数は， $\{X_t\}$  の独立性，および，同分布性より，

$$\varphi_{Y_t}(\xi) = E\left[e^{i\frac{\xi}{\sqrt{t}} \sum_{j=1}^t X_j}\right] = \prod_{j=1}^t E\left[e^{i\frac{\xi}{\sqrt{t}} X_j}\right] = \left(\varphi\left(\frac{\xi}{\sqrt{t}}\right)\right)^t$$

である。但し,  $X_1$  の特性関数を  $\varphi$  とおいた。

(3)  $E[X_1^2] = 1 < \infty$  より,  $\varphi, \varphi', \varphi''$  は全て有界であることが分かる。実際,

$$\varphi(\xi) = E[e^{i\xi X}], \quad \varphi'(\xi) = E[iX e^{i\xi X}], \quad \varphi''(\xi) = E[-X^2 e^{i\xi X}], \dots$$

が成り立つ。

テイラー (Taylor) の公式を用いると,  $|\eta| \leq |\xi|/\sqrt{t}$  を満たすある  $\eta \in \mathbb{R}$  が存在して,

$$\varphi\left(\frac{\xi}{\sqrt{t}}\right) = \varphi(0) + \frac{\xi}{\sqrt{t}}\varphi'(0) + \frac{\xi^2}{2t}\varphi''(\eta)$$

と書ける。

(4)  $\varphi(0) = 1$ ,  $\varphi'(0) = E[iX] = 0$  であること, および,  $\varphi''(0) = -1$  となることに注意すると, 特性関数は以下のように計算される:

$$\begin{aligned} \log \varphi_{Y_t}(\xi) &= t \log \varphi\left(\frac{\xi}{\sqrt{t}}\right) \\ &= t \log\left(1 + \frac{\xi^2}{2t}\varphi''(\eta)\right) \\ &= \frac{\eta^2}{2}\varphi''(\eta) + o(1) \\ &\rightarrow \frac{\xi^2}{2}\varphi''(0) = -\frac{\xi^2}{2} \quad (t \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

但し, 4 行目は  $|\varphi''(\eta)| \leq 1$  より,  $\log(1 + \delta) = \delta + o(\delta)$  ( $\delta \rightarrow 0$ ) の関係が成り立つことを用いた。故に,

$$\varphi_{Y_t}(\xi) \rightarrow \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2}\right\} = \varphi_Y(\xi) \quad (t \rightarrow \infty)$$

が示された。Y は平均 0, 分散 1 の標準正規分布に従う確率変数である。□

## 2.2 量子ウォークとは

この節では, 量子ウォークの中でも最も活発に研究がされている, 1次元系で右か左, 即ち, 最近接に量子ウォーカーが移動する 2 状態の量子ウォークの定義と基本的な性質を解説する。量子ウォークは全空間とその上の時間発展作用素, および分布列で構成されている。

### 2.2.1 全空間

まず,

$$\begin{cases} \mathcal{H}_P = \text{Span}\{|x\rangle : x \in \mathbb{Z}\} : \text{量子ウォーカーの場所,} \\ \mathcal{H}_C = \text{Span}\{|J\rangle : J \in \{L, R\}\} : \text{量子ウォーカーの自由度,} \end{cases}$$

をそれぞれ表すヒルベルト空間とする．このとき，量子ウォークの全空間は以下のヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  で定義される：

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_P \otimes \mathcal{H}_C.$$

全空間  $\mathcal{H}$  は，量子ウォークの（非自明な）時間発展を決定するユニタリ作用素を定義するために，量子ウォーカーの場所を表す空間  $\mathcal{H}_P$  に 2 次の自由度を持つ空間  $\mathcal{H}_C$  が付随する形になる．

## 2.2.2 量子ウォークの定義

1 次元系の 2 状態量子ウォークの時間発展は「量子コイン」とも呼ばれる以下のような  $2 \times 2$  のユニタリ行列  $U$  により定義される：

$$U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U(2).$$

但し， $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ . このとき， $U$  のユニタリ性から，

$$|a|^2 + |c|^2 = |b|^2 + |d|^2 = 1, \quad a\bar{b} + c\bar{d} = 0, \quad c = -\Delta\bar{b}, \quad d = \Delta\bar{a}, \quad |\Delta| = 1$$

が成り立つ．但し， $\bar{z}$  ( $z \in \mathbb{C}$ ) は  $z$  の複素共役で  $\Delta = \det(U) = ad - bc$  とおいた．

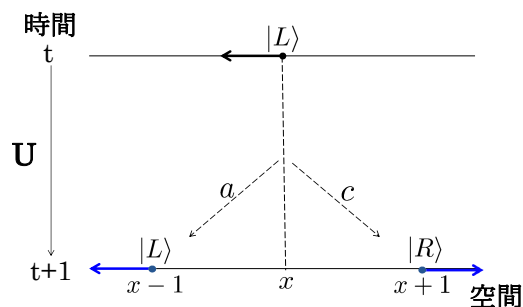
量子ウォークは，量子ウォーカーの動く向きを表す「左向き」と「右向き」の 2 つのカイラリティ  $|L\rangle$  と  $|R\rangle$  を持ち，

$$\begin{cases} U|L\rangle = a|L\rangle + c|R\rangle, \\ U|R\rangle = b|L\rangle + d|R\rangle \end{cases}$$

が成り立つ．但し，

$$|L\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |R\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

量子ウォーカーの挙動の概念は図 2.2 のようになる．



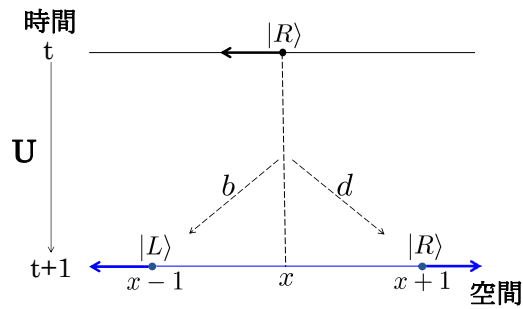


図 2.2: 量子ウォーカーの挙動 [22]

古典ランダムウォークでは、左に移動する確率が  $p$  ( $p \in \mathbb{R}$ )、右に移動する確率が  $q$  ( $q \in \mathbb{R}$ ) というように、各格子点に対して実数が与えられていた。これに対して、量子ウォークでは、右に移動する重み  $Q$ 、及び左に移動する重み  $P$  を

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$$

で定義される  $2 \times 2$  の正方行列  $P, Q$  でそれぞれ定義する。但し、

$$U = P + Q.$$

これより、量子ウォークは古典ランダムウォークの最も自然な量子化とみなすことが出来る。

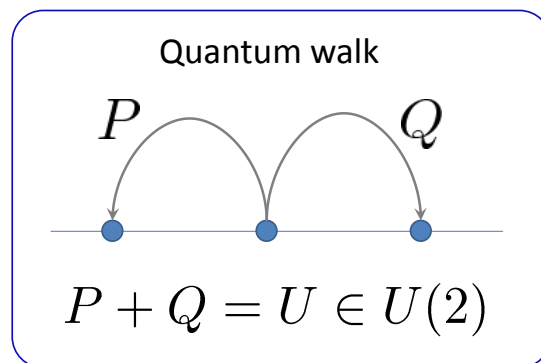


図 2.3: 量子ウォークの概念図

「アダマールウォーク (Hadamard walk)」は量子ウォークの中で最も活発に研究されてきたモデルで、1次元系では時間発展作用素が以下のユニタリ行列で定義される：

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$



$H$  は「アダマール行列」、「アダマール作用素」、「アダマールゲート」などと呼ばれる。アダマール行列は各成分の絶対値の 2 乗が  $1/2$  であるため、アダマールウォークは原点对称性を持つ古典ランダムウォークに対応する量子ウォークと考えることも出来る。ここで「原点对称性を持つ」とは、左右に確率  $1/2$  でウォーカーが移動するものをいう。しかし、アダマールウォークと古典ランダムウォークとは本質的な違いがある。例えば、アダマールウォークでは原点における初期状態が  $\varphi = {}^T[1/\sqrt{2}, i/\sqrt{2}]$  の場合の確率分布は対称 [33] となるが、その形状は古典ランダムウォークの分布と全く異なる (図 2.6 参照)。また、アダマールウォークの確率分布の対称性は初期状態に強く依存する。古典ランダムウォークの確率分布は正規分布で近似されるが、アダマールウォークでは逆釣鐘型に複雑に振動する。一般の量子ウォークに対しても同様に、古典ランダムウォークとは本質的な違いがある。

### 2.2.3 時間発展と確率分布

量子ウォークの時間発展と量子ウォーカーの存在確率を定義する。量子ウォークの時間発展は、ユニタリ行列と初期状態によって完全に決定される。特性関数や  $k$  次モーメント、極限定理などの初期状態依存性を調べることは、量子ウォークの理論研究において非常に意義のあることである。

時刻  $t$  での量子ウォーク  $X_t$  を考える。原点での初期状態を  $\varphi = {}^T[\alpha, \beta]$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ ) とおく。

注意: 量子ウォーク  $X_t$  は、古典ランダムウォークの場合のように独立同分布の確率変数列  $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  を用いて  $X_t = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_t$  のように表すことはできない。

時間発展作用素が以下で定義される場所に依存する量子ウォークを考える。

$$U_x = \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ c_x & d_x \end{bmatrix} \quad (x \in \mathbb{Z}).$$

$U_x$  に対して、

$$P_x = \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_x & d_x \end{bmatrix}$$

とおく。

量子ウォーカーの時刻  $t$  場所  $x$  における確率振幅  $\Psi_t(x) \in \mathbb{C}^2$  を

$$\Psi_t(x) = \begin{bmatrix} \Psi_t^L(x) \\ \Psi_t^R(x) \end{bmatrix}$$

とおく ( $\Psi_t^L(x)$  が確率振幅の左向きのカイラリティ、 $\Psi_t^R(x)$  が右向きのカイラリティにそれぞれ対応する) このように、量子ウォークでは各時刻  $t$  において各場所  $x$  に確率振幅  $\Psi_t(x)$  がおかれていると考える。

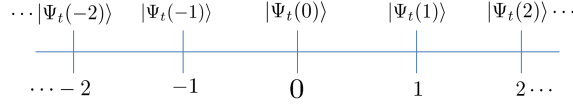


図 2.4: 量子ウォークの時刻  $t$  における状態

このとき，量子ウォークは次の漸化式に従って時間発展をする．

$$\Psi_{t+1}(x) = P_{x+1}\Psi_t(x+1) + Q_x\Psi_t(x-1).$$

以上のような設定で，時刻  $t$  場所  $x$  に量子ウォーカーが存在する確率  $P(X_t = x)$  を

$$P(X_t = x) = |\Psi_t^L(x)|^2 + |\Psi_t^R(x)|^2$$

で定義する．

ここで， $P(X_t = x)$  の組み合わせ論的な別の表現を紹介する．まず，時刻  $t$  までに左に  $l$  回，右に  $r$  回移動するパスの重みの総和を

$$\Xi_t(l, r) = \sum_{l_j, r_j} P^{l_1} Q^{r_1} P^{l_2} Q^{r_2} \dots P^{l_t} Q^{r_t}.$$

とおく．但し， $l, r \in \mathbb{R}$  は  $l + r = t$ ,  $-l + r = x$  を満たすとする．このとき， $X_t = x$  となる確率  $P(X_t = x)$  は次のようにも書き表すことができる：

$$P(X_t = x) = (\Xi_t(l, r)\varphi)^*(\Xi_t(l, r)\varphi) = \|\Xi_t(l, r)\varphi\|^2.$$

但し，“\*” は随伴作用素を表す．これにより，量子ウォークの確率分布が定義される．また，以下のような  $\infty \times \infty$  のユニタリ行列を導入する．

$$U^{(s)} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & O & P_{-1} & O & O & O \dots \\ \dots & Q_{-2} & O & P_0 & O & O \dots \\ \dots & O & Q_{-1} & O & P_1 & O \dots \\ \dots & O & O & Q_0 & O & P_2 \dots \\ \dots & O & O & O & Q_1 & O \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad \text{但し, } O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

このユニタリ行列を用いると時刻  $t$  の量子ウォーカーの状態は，

$$\Psi_t = (U^{(s)})^t \Psi_0$$

と表される．

## 2.3 量子ウォークの測度

近年，量子ウォークから様々な測度を構成できることが分かってきた [25, 26, 27, 28] . ここでは，本論文の主題でもある定常測度と時間平均極限測度を導入する．時刻  $t$  での系全体の確率振幅ベクトルを

$$\Psi_t = {}^T[\dots, \Psi_t^L(-1), \Psi_t^R(-1), \Psi_t^L(0), \Psi_t^R(0), \Psi_t^L(1), \Psi_t^R(1), \dots] \in (\mathbb{C}^2)^{\mathbb{Z}}$$

とおく．また， $U^{(s)}$  を式 (2.3) で定義される系全体の時間発展を決定する  $\infty \times \infty$  のユニタリ行列とする．ここで，量子ウォークの初期状態に関する以下の集合  $\mathcal{A}_0$  を導入する：

$$\mathcal{A}_0 = \{\Psi_0 \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \setminus \{0\} : U^{(s)}\Psi_0 = \Psi_0\}.$$

但し， $0 = {}^T[\dots, 0, 0, 0, \dots]$  は各成分が 0 のベクトルである．集合  $\mathcal{A}_0$  の要素は系の時間発展に対して変化しないので，「定常確率振幅 (stationary probability amplitude)」と呼ばれる．また，系の初期状態が  $\Psi_0$  のときの時刻  $t$  場所  $x$  に量子ウォーカーが存在する測度  $\mu_t(x)$  を以下で定める．

$$\mu_t(x) = \|\Psi_t(x)\|^2 = |\Psi_t^L(x)|^2 + |\Psi_t^R(x)|^2.$$

このとき，写像  $\rho : (\mathbb{C}^2)^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}}$  を次のように定める．

$$\Psi = {}^T\left[\dots, \begin{bmatrix} \Psi^L(-1) \\ \Psi^R(-1) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Psi^L(0) \\ \Psi^R(0) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Psi^L(1) \\ \Psi^R(1) \end{bmatrix}, \dots\right] \in (\mathbb{C}^2)^{\mathbb{Z}}. \quad (2.4)$$

に対して， $\mu(x) = \rho(\Psi(x))$  を

$$\mu(x) = \rho(\Psi(x)) = |\Psi^L(x)|^2 + |\Psi^R(x)|^2 \quad (x \in \mathbb{Z}) \quad (2.5)$$

で定義する． $\mu(x)$  は，写像  $\rho$  を各  $x \in \mathbb{Z}$  毎に取り出したものである．さらに，以下のような測度の集合  $\mathcal{B}_0$  を導入する：

$$\mathcal{B}_0 = \{\rho(\Psi_0) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}} \setminus \{0\} : \Psi_0 \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \text{ は，任意の } n \geq 0 \text{ に対して } \rho((U^{(s)})^n \Psi_0) = \rho(\Psi_0)\}.$$

$\mathcal{B}_0$  の元を「定常測度 (stationary measure)」と呼ぶ．

次に， $\Psi_t(x)$  の  $t \rightarrow \infty$  の極限が存在するとき，その極限  $\Psi_\infty(x)$  を

$$\Psi_\infty(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Psi_t(x) \quad (x \in \mathbb{Z}).$$

と書く．さらに， $\Psi_t(x)$  の時間平均とその極限  $\bar{\Psi}_T(x)$  を以下のように書く．

$$\bar{\Psi}_T(x) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \Psi_t(x), \quad \bar{\Psi}_\infty(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \Psi_t(x).$$

また，以下のように集合  $\mathcal{A}_\infty$  と  $\bar{\mathcal{A}}_\infty$  を導入する：

$$\mathcal{A}_\infty = \{\Psi_\infty = \Psi_\infty^{\Psi_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \setminus \{0\} : \Psi_0 \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}\}, \quad \bar{\mathcal{A}}_\infty = \{\bar{\Psi}_\infty = \bar{\Psi}_\infty^{\Psi_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \setminus \{0\} : \Psi_0 \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}\}.$$

但し， $\Psi_\infty^{\Psi_0}$ ，および， $\bar{\Psi}_\infty^{\Psi_0}$  は  $\mu_\infty$  の初期状態  $\Psi_0$  への依存性を表す． $\mathcal{A}_\infty$  の要素を「極限確率振幅 (limit probability amplitude)」， $\bar{\mathcal{A}}_\infty$  の要素を「時間平均確率振幅 (time-averaged probability amplitude)」という． $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_\infty \subset \bar{\mathcal{A}}_\infty$  の関係がある．

次に， $\mu_t(x)$  に  $t \rightarrow \infty$  の極限が存在するとき，その極限  $\mu_\infty(x)$  を

$$\mu_\infty(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(x).$$

と書く．さらに， $\mu_t(x)$  の時間平均とその極限  $\bar{\mu}_\infty(x)$  を以下のように書く．

$$\bar{\mu}_T(x) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \mu_t(x), \quad \bar{\mu}_\infty(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \mu_t(x).$$

そして，次のような測度の集合  $\mathcal{B}_\infty$  と  $\bar{\mathcal{B}}_\infty$  を導入する：

$$\mathcal{B}_\infty = \{\mu_\infty = \mu_\infty^{\Psi_0} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}} \setminus \{0\} : \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}\}, \quad \bar{\mathcal{B}}_\infty = \{\bar{\mu}_\infty = \bar{\mu}_\infty^{\Psi_0} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}} \setminus \{0\} : \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}\}.$$

但し， $\mu_\infty^{\Psi_0}$ ，および  $\bar{\mu}_\infty^{\Psi_0}$  は  $\mu_\infty$  の初期状態依存性を表す． $\mathcal{B}_\infty$  の要素を「極限測度 (limit measure)」， $\bar{\mathcal{B}}_\infty$  の要素を「時間平均極限測度 (time-averaged limit measure)」と呼ぶ． $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_\infty \subset \bar{\mathcal{B}}_\infty$  の関係がある．また，任意の  $x \in \mathbb{Z}$  に対して，以下が成り立つことが知られている．

$$\mu_\infty(x) = \|\Psi_\infty(x)\|^2, \quad \bar{\mu}_\infty(x) = \|\bar{\Psi}_\infty(x)\|^2.$$

## 2.4 量子ウォークの性質

離散時間量子ウォークには，古典ランダムウォークとは異なる顕著な性質がある．時間が十分に経過したときに量子ウォーカーが高い確率で原点付近に見つかる「局在化」，量子ウォーカーが時間に関して「線型的な広がり」をすること，および「逆釣鐘型」の確率分布をすることである．ここでは，これらの性質を詳しく解説する．

### 2.4.1 局在化

量子ウォーク特有の性質として，時間が十分に経過したときに出発点付近で量子ウォーカーが見つかりやすい「局在化」というものがある．局在化は数学的には，時間が十分に経過したときに出発点に戻る確率が正になることで定義される．

まず，原点から出発するアダマールウォーク  $X_t$  の再帰確率 (return probability) について考える．但し， $t$  は時刻を表す．簡単のため，量子ウォーカーの初期状態は原点では  $\varphi = {}^T[1/\sqrt{2}, i/\sqrt{2}]$  とする．このとき，原点から出発し時刻  $t$  に原点に戻る確率を

$$p_t(0) = P(X_t = 0)$$

とおく．奇数時刻では戻れない，即ち， $p_{2n+1} = 0$  ( $t \geq 0$ ) となることに注意する．ここで，アダマールウォークの時間発展作用素は以下で定義された：

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

このとき，実際にいくつかの時刻でのアダマールウォークの再帰確率を計算すると，

$$p_0(0) = 1, p_2(0) = 0.5, p_4(0) = p_6(0) = 0.125, p_8(0) = p_{10}(0) = 0.07031 \dots$$

など [29]． $p_{2t}(0)$  はルジャンドル多項式  $P_t(x)$  を用いて次のように表すことができる [29]．

命題 1.

$$p_{2t}(0) = \frac{1}{2} \{ \{P_{t-1}(0)\}^2 + \{P_t(0)\}^2 \} \quad (t \geq 1).$$

但し， $p_0(0) = 0$ ．

実は，1次元系の離散時間量子ウォークの中でも，時間発展が場所に依存しない一様なモデルに関しては，2状態では局在化が起こらず3状態以上で局在化が起こり得ることが分かっている [15, 22]．ここで「3状態」とは，量子ウォーカーが最近接に移動する，もしくはその場に留まる3状態を取り得ることをいう．ここで，局在化は時間平均極限測度を用いて以下のように数学的に定義される．

定義 1. 量子ウォーカーが原点から出発する離散時間量子ウォークに対して局在化が起こるとは，以下が成り立つことと定義する．

$$\bar{\mu}_\infty(0) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} P(X_t = 0) > 0.$$

●1次元系で局在化が起こる例：3状態グローヴァーウォーク

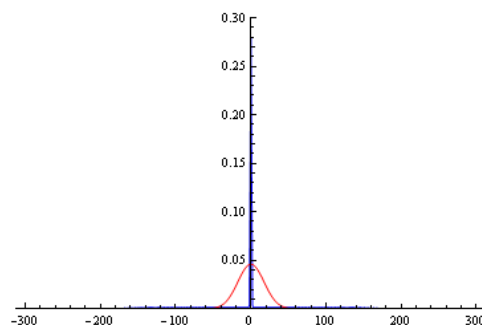


図 2.5: 青線：グローヴァーウォークの確率分布，赤線：古典ランダムウォークの確率分布，横軸：場所，縦軸：確率，時刻：500, (今野紀雄教授 講演録，お茶の水女子大学 (2011)[24])

## 2.4.2 弱収束の極限定理

ここでは、以下のユニタリ行列で定義される場所  $x \in \mathbb{Z}$  に関して一様な量子ウォーク  $X_t$  に対するある種の極限定理を紹介する。

$$U_x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad abcd \neq 0.$$

この極限定理は古典系の中心極限定理に対応しており、量子ウォークの長時間極限における振舞いの特性、特に量子ウォーカーの線型的な広がりや逆釣鐘型の確率分布を記述する。

定理 6. [21]  $t \rightarrow \infty$  のとき、

$$\frac{X_t}{t} \Rightarrow Z \quad (2.6)$$

となる。ここで、 $Z$  の密度関数は  $x \in (-|a|, |a|)$  に対して、

$$f_K(x; a) = \frac{\sqrt{1 - |a|^2}}{\pi(1 - x^2)\sqrt{|a|^2 - x^2}} I_{(-|a|, |a|)}(x) \left\{ 1 - \left( |\alpha|^2 - |\beta|^2 + \frac{a\alpha\bar{b}\beta}{|a|^2} \right) x \right\}$$

と表される。但し、 $|x| \geq a$  に対しては、 $f(x; a) = 0$  であることに注意する。但し、

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A), \\ 0 & (x \in X \setminus A). \end{cases}$$

。また、 $Y_t \Rightarrow Y$  は、 $Y_t$  が確率変数  $Y$  に弱収束することを意味する。

式 (2.6) は  $-\infty < a < b < \infty$  なる  $a, b \in \mathbb{R}$  に対して、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P \left( a \leq \frac{X_t}{t} \leq b \right) = \int_a^b f_K(x; a) dx$$

となることと同値である。

• アダマールウォークの場合 [21] :

$$\frac{X_t}{t} \Rightarrow Z_H$$

$Z_H$  の密度関数は、

$$f_H(x) = w(x) f_K(x; 1/\sqrt{2})$$

但し、 $w(x) = 1 - (|\alpha|^2 - |\beta|^2 + \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta)x$ .

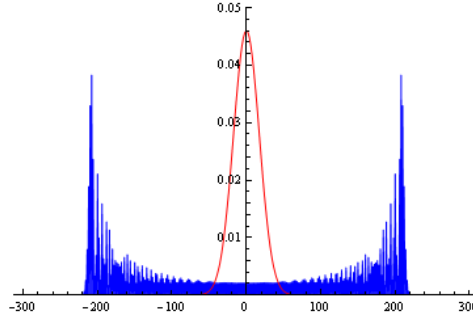


図 2.6: 青線：アダマルウォークの確率分布, 赤線：古典ランダムウォークの確率分布, 横軸：場所, 縦軸：確率, 時刻：500, (今野紀雄教授 講演録, お茶の水女子大学 (2011)[24])

### 2.4.3 ユニバーサリティクラス

最後に, 1次元系における2状態のアダマルウォークを例に量子ウォークのユニバーサリティクラスについて簡単に解説する. 時刻0における  $x \in \mathbb{Z}$  での量子ウォーカーの状態が

$$\Psi_0(x) = T[1/\sqrt{2}, i/\sqrt{2}]\delta_0(x)$$

である場合を考える. 但し,  $\delta_0(x)$  は, デルタ測度とする. このとき弱収束極限測度は,

$$\mu^{(\Psi_0)}(x) = f_K(x; 1/\sqrt{2})$$

となる. 実は, 一般に場所  $x \in \mathbb{Z}$  における時間発展作用素が

$$U_x = \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ c_x & d_x \end{bmatrix}$$

で定義される量子ウォークの弱収束極限測度は以下のような形になることが期待されている:

ある  $C \in [0, 1)$  と有理多項式  $w(x)$  が存在して,

$$\mu^{\Psi_0}(dx) = C\delta_0(x) + (1 - C)w(x)f_K(x; r)dx.$$

このような弱収束極限測度を持つ量子ウォークの全体を  $\mathcal{U}$  とおく. 即ち, その弱収束極限測度は出発点の原点におけるデルタ測度  $\delta_0(x)$  (局在化に対応) および, 関数  $f_K(x; r)$  により特徴づけられる (絶対連続な)  $w(x)f_K(x; r)dx$  の線型結合になっている. こうして定義されるクラス  $\mathcal{U}$  は, 参考文献 [25] の中で量子ウォークの「ユニバーサリティクラス」の1つとして導入された. 現在,  $\mathcal{U}$  に属している量子ウォークはいくつか見つかっており, それら量子ウォークに対しては, 有理関数  $w(x)$  が比較的次数の低い多項式で書けることが分かっている.

## 第3章 時空間母関数法

量子ウォークの漸近挙動を厳密に解析するためにフーリエ解析による方法 [11] や停留位相法 [19], CGMV 法 [4] などいくつかの定石的手法が構築されてきた。フーリエ解析による方法や停留位相法などは、量子ウォーカーの挙動が空間に依存しない量子ウォークの漸近挙動の解析には強力な手法であるが、本章で解説する時空間母関数法 [5, 25, 29] は空間的に非一様ないくつかの量子ウォークに対しても適用可能であることが分かっている [7, 25, 28]。時空間母関数法は本論文の研究で用いる主要な解析手法の1つであるため、パスの重みの母関数の構成から局在化に対応する時間平均極限測度の定式化まで詳しくまとめる。尚、本章は、参考文献 [29] をもとにした時空間母関数法のレビューである。

### 3.1 設定

量子ウォーカーの挙動が場所に依存する非一様量子ウォーク、特に各場所  $x \in \mathbb{Z}$  に対して時間発展作用素が以下のユニタリ行列  $U_x$  で与えられるモデルを考える。

$$U_x = \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ c_x & d_x \end{bmatrix}.$$

但し、 $a_x, b_x, c_x, d_x \in \mathbb{C}$ ,  $a_x b_x c_x d_x \neq 0$ 。また、 $\Delta_x = \det U_x$  とおく。量子ウォークの全体空間は、

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_P \otimes \mathcal{H}_C$$

で定義されるヒルベルト空間だった (第2章参照)。但し、

$$\mathcal{H}_P = \text{Span}\{|x\rangle : x \in \mathbb{Z}\}, \quad \mathcal{H}_C = \text{Span}\{|L\rangle, |R\rangle\}.$$

また、

$$|L\rangle = {}^T[1, 0], \quad |R\rangle = {}^T[0, 1]$$

は、各々左向きと右向きのカイラリティである。このとき、モデルの時間発展は以下で定義される。

$$U = SC. \tag{3.1}$$

$$\tag{3.2}$$



但し,  $C, S$  は以下で定義される  $\mathcal{H}$  上の演算子である .

$$C = \sum_x |x\rangle\langle x| \otimes U_x,$$

$$S|x, J\rangle = \begin{cases} |x+1, R\rangle & (j = R), \\ |x-1, L\rangle & (j = L). \end{cases}$$

## 3.2 パスの重みの母関数

ここでは, 本論文で時間平均極限測度を構成する際に用いたパスの重みの母関数を構成する .

(1) 量子ウォーカーが場所  $x$  から出発して,  $\{y \in \mathbb{R} : x \leq y\}$  の領域を移動しながら時刻  $t$  に初めて場所  $x$  に戻ってくるパスの場合 :

$F^{(+)}(x, t)$  : パスの重みの総和とする . 例えば 1 次元系で, 原点から出発し時刻  $t$  で初めて原点に戻る場合, 以下のようなになる .

$$F^{(+)}(0, 6) = P_1 P_2 P_3 Q_2 Q_1 Q_0 + P_1 P_2 Q_1 P_2 Q_1 Q_0.$$

簡単な計算により, ある  $f^{(+)}(x, t) \in \mathbb{R}$  が存在して

$$F^{(+)}(0, 6) = f^{(+)}(x, t) |L\rangle\langle R| U_0 = f^{(+)}(x, t) R_0.$$

となることが分かる .

注意:  $F^{(+)}(x, t)$  の定め方より, 各パスは  $Q_x$  で始まり  $P_x$  で終わるので, 一般に  $F^{(+)}(x, t) = f^{(+)}(x, t) R_x$  となる  $f^{(+)}(x, t) \in \mathbb{R}$  が存在することが分かる . 但し,

$$R_x = |L\rangle\langle R| U_x = \begin{bmatrix} c_x & d_x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

ここで, 以下の 2 種類の母関数を導入する :

$$\begin{cases} \tilde{F}_x^{(+)}(z) = \sum_{t \geq 0} F^{(+)}(x, t) z^t, \\ \tilde{f}_x^{(+)}(z) = \sum_{t=2}^{\infty} f^{(+)}(x, t) z^t. \end{cases}$$

注意:  $\tilde{F}_x^{(+)}(0) = O_2$ ,  $\tilde{f}_x^{(+)}(0) = 0$  . 但し,  $O_2$  は  $2 \times 2$  のゼロ行列である . このとき,

$$\tilde{F}_x^{(+)}(z) = \tilde{f}_x^{(+)}(z) R_x. \quad (3.3)$$

と書けることが分かる .

(2) 量子ウォーカーが場所  $x$  から出発して ,  $\{y \in \mathbb{R} : y \leq x\}$  の領域を移動しながら時刻  $t$  に初めて  $x$  に戻るパスの場合 :

$F^{(-)}(x, t)$  : パスの重みの総和とする . 例えば ,

$$F^{(-)}(x, 2) = Q_{x-1}P_x, \quad F^{(-)}(x, 4) = Q_{x-1}Q_{x-2}P_{x-1}O_x.$$

注意:  $F^{(-)}(x, t)$  の定め方より , 各パスは  $P_x$  で始まり  $Q_x$  で終わるため , 一般に  $F^{(-)}(x, t) = \beta S_x$  となる  $f^{(-)}(x, t) \in \mathbb{R}$  が存在することが分かる . 但し ,

$$S_x = |R\rangle\langle L|U_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_x & b_x \end{bmatrix}.$$

例えば ,

$$F^{(-)}(0, 4) = Q_{-1}Q_{-2}P_{-1}P_0 = a_{-1}d_{-1}c_{-2}S_0.$$

より , それぞれ  $f^{(-)}(x, t) = c_{x-1}$  ,  $f^{(-)}(x, t) = a_{x-1}d_{x-1}c_{x-2}$  を得る . ここで , 以下の 2 種類の母関数を導入する :

$$\begin{cases} \tilde{F}_x^{(-)}(z) = \sum_{t=2}^{\infty} F^{(-)}(x, t)z^t, \\ \tilde{f}_x^{(-)}(z) = \sum_{t=2}^{\infty} f^{(-)}(x, t)z^t. \end{cases}$$

注意 :  $\tilde{F}_x^{(-)}(0) = O_2$  ,  $\tilde{f}_x^{(-)}(0) = 0$  .

このとき ,

$$\tilde{F}_x^{(-)}(z) = \tilde{f}_x^{(-)}(z)S_x \tag{3.4}$$

と書けることが分かる .

(3) 量子ウォーカーが場所  $x$  から出発して ,  $\{y \in \mathbb{R} : x \leq y\}$  の領域を移動しながら再び  $x$  に戻るようなパスの場合 :

$\Xi^{(+)}(x, t)$  : パスの重みの総和とする . 例えば ,

$$\Xi^{(+)}(0, 4) = P_1P_2Q_1Q_0 + P_1Q_0P_1Q_0.$$

$\Xi^{(+)}(x, t)$  の母関数を導入する :

$$\tilde{\Xi}^{(+)}(z) = \sum_{t=0}^{\infty} \Xi^{(+)}(x, t)z^t.$$

このとき,  $\Xi^{(+)}(x, t)$  は次のように計算される .

$$\begin{aligned}\tilde{\Xi}_x^{(+)}(z) &= I + \tilde{F}_x^{(+)}(z) + (\tilde{F}_x^{(+)}(z))^2 + (\tilde{F}_x^{(+)}(z))^3 + \dots \\ &= I + \tilde{F}_x^{(+)}(z) \left( I + \tilde{F}_x^{(+)}(z) + (\tilde{F}_x^{(+)}(z))^2 + (\tilde{F}_x^{(+)}(z))^3 + \dots \right) \\ &= I + \tilde{F}_x^{(+)}(z) \tilde{\Xi}_x^{(+)}(z).\end{aligned}$$

但し,  $I$  は  $2 \times 2$  の単位行列 . これより ,

$$\begin{aligned}\tilde{\Xi}_x^{(+)}(z) &= (I - \tilde{f}_x^{(+)}(z)R_x)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - c_x \tilde{f}_x^{(+)}(z) & -d_x \tilde{f}_x^{(+)}(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{1 - c_x \tilde{f}_x^{(+)}(z)} \begin{bmatrix} 1 & d_x \tilde{f}_x^{(+)}(z) \\ 0 & 1 - c_x \tilde{f}_x^{(+)}(z) \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{3.5}$$

が得られる . さらに,  $\tilde{F}_x^{(+)}(z)$  の定義より ,

$$\tilde{F}_x^{(+)}(z) = zP_{x+1}\tilde{\Xi}_{x+1}^{(+)}(z)Q_x\tag{3.6}$$

が導かれる . 従って, 式 (3.6) に式 (3.3) , (3.6) を代入して ,

$$\tilde{f}_x^{(+)}(z) = \frac{z^2 \left( \Delta_{x+1} \tilde{f}_{x+1}^{(+)}(z) + b_{x+1} \right)}{1 - c_{x+1} \tilde{f}_{x+1}^{(+)}(z)}$$

を得る . これより ,

$$\tilde{f}_x^{(+)}(z) = -\frac{z^2 \Delta_{x+1}}{c_{x+1}} \left( 1 - \frac{|a_{x+1}|^2}{1 - c_{x+1} \tilde{f}_{x+1}^{(+)}(z)} \right)$$

となる .

(4) 量子ウォーカーが場所  $x$  から出発して,  $\{y \in \mathbb{R} : y \leq x\}$  の領域を移動しながら再び  $x$  に戻るようなパスの場合 :

$\Xi^{(-)}(x, t)$  : パスの重みの総和とする . 例えば ,

$$\Xi^{(-)}(0, 4) = Q_{-1}Q_{-2}P_{-1}P_0 + Q_{-1}P_0Q_{-1}P_0.$$

$\Xi^{(-)}(x, t)$  の母関数を導入する :

$$\tilde{\Xi}_x^{(-)}(z) = \sum_{t=0}^{\infty} \Xi^{(-)}(x, t) z^t.$$

$\tilde{\Xi}_x^{(+)}(z)$  のときと同様の議論により,

$$\tilde{\Xi}_x^{(-)}(z) = I + \tilde{F}_x^{(-)}(z)\tilde{\Xi}_x^{(-)}(z)$$

が導かれる．従って,

$$\tilde{\Xi}_x^{(-)}(z) = (I - \tilde{F}_x^{(-)}(z))^{-1}$$

となる． $F_x^{(-)}(z)$  の定義より,

$$\tilde{F}_x^{(-)}(z) = zQ_{x-1}\tilde{\Xi}_{x-1}^{(-)}(z)zP_x$$

が導かれる．故に,

$$\tilde{f}_x^{(-)}(z) = -\frac{z^2\Delta_{x-1}}{b_{x-1}} \left( 1 - \frac{|d_{x-1}|^2}{1 - b_{x-1}\tilde{f}_{x-1}^{(-)}(z)} \right)$$

を得る．

(5) 原点から出発して時刻  $t$  に場所  $x$  に到達するパスの場合:

$\Xi(x, t)$ : パスの重みの総和とし, 以下の母関数を導入する:

$$\tilde{\Xi}_x(z) = \sum_{t=0}^{\infty} \Xi(x, t)z^t.$$

1.  $x = 0$  の場合:  $\tilde{\Xi}_0(z)$  と  $\tilde{F}_0^{(\pm)}(z)$  の関係から,

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi}_0(z) &= I + \left( \tilde{F}_0^{(+)}(z) + \tilde{F}_0^{(-)}(z) \right) + \left( \tilde{F}_0^{(+)}(z) + \tilde{F}_0^{(-)}(z) \right)^2 + \dots \\ &= I + \left( \tilde{F}_0^{(+)}(z) + \tilde{F}_0^{(-)}(z) \right) \tilde{\Xi}_0(z) \end{aligned}$$

が導かれる．式 (3.3) と式 (3.4) より,

$$\tilde{F}_0^{(+)}(z) + \tilde{F}_0^{(-)}(z) = \begin{bmatrix} c_0\tilde{f}_0^{(+)}(z) & d_0\tilde{f}_0^{(+)}(z) \\ a_0\tilde{f}_0^{(-)}(z) & b_0\tilde{f}_0^{(-)}(z) \end{bmatrix}$$

が得られる．従って,

$$\tilde{\Xi}_0(z) = \frac{1}{\gamma(z)} \begin{bmatrix} 1 - b_0\tilde{f}_0^{(-)}(z) & d_0\tilde{f}_0^{(+)}(z) \\ a_0\tilde{f}_0^{(-)}(z) & 1 - c_0\tilde{f}_0^{(-)}(z) \end{bmatrix}$$

を得る．但し,

$$\gamma(z) = 1 - c_0\tilde{f}_0^{(+)}(z) - b_0\tilde{f}_0^{(-)}(z) - \Delta_0\tilde{f}_0^{(+)}(z)\tilde{f}_0^{(-)}(z)$$

とおいた .

2.  $x \geq 1$  の場合 :  $\tilde{\Xi}_x(z)$  の定義より ,

$$\tilde{\Xi}_x(z) = \tilde{\Xi}_x^{(+)}(z)zQ_{x-1}\tilde{\Xi}_{x-1}(z) \quad (3.7)$$

が成り立つ .  $0 \leq y \leq x$  なる  $y \in \mathbb{Z}$  に対して

$$|u_y^{(+)}\rangle = \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_y^{(+)}(z)\tilde{f}_y^{(+)}(z) \\ z \end{bmatrix}, \quad |v_y^{(+)}\rangle = \begin{bmatrix} \bar{c}_y \\ \bar{d}_y \end{bmatrix}$$

とおく . 但し ,  $\tilde{\lambda}_y^{(+)}(z) = zd_y/(1 - c_y\tilde{f}_y^{(+)}(z))$  とおいた . このとき

$$\langle v_y^{(+)}, u_y^{(+)} \rangle = \lambda^{(+)}_y(z)$$

が成り立つ . 式 (3.7) に注意すると ,

$$\tilde{\Xi}_x^{(+)}(z)zQ_{x-1} = |u_x^{(+)}\rangle\langle v_{x-1}^{(+)}| \quad (3.8)$$

が分かる . 式 (3.7) , (3.8) より ,  $\tilde{\Xi}_x(z)$  は以下のように書き表される .

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi}_x(z) &= |u_x^{(+)}\rangle\langle v_{x-1}^{(+)}|\tilde{\Xi}_{x-1}(z) \\ &= |u_x^{(+)}\rangle\langle v_{x-1}^{(+)}, u_{x-1}^{(+)} \rangle \cdots \langle v_1^{(+)}, u_1^{(+)} \rangle \langle v_0^{(+)}|\tilde{\Xi}_0(z) \\ &= \langle v_{x-1}^{(+)}, u_{x-1}^{(+)} \rangle \cdots \langle v_1^{(+)}, u_1^{(+)} \rangle |u_x^{(+)}\rangle\langle v_0^{(+)}|\tilde{\Xi}_0(z) \\ &= \tilde{\lambda}_{x-1}^{(+)}(z) \cdots \tilde{\lambda}_1^{(+)}(z) \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_x^{(+)}(z)\tilde{f}_x^{(+)}(z) \\ z \end{bmatrix} [c_0 \ d_0]\tilde{\Xi}_0(z). \end{aligned}$$

特に ,  $x = 1$  の場合は,

$$\tilde{\Xi}_1(z) = \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_1^{(+)}(z)\tilde{f}_1^{(+)}(z) \\ z \end{bmatrix} [c_0 \ d_0]\tilde{\Xi}_0(z)$$

とする .

3.  $x \leq -1$  の場合 : 同様にして以下のように対応する結果を得ることができる . 定義より ,

$$\tilde{\Xi}_x(z) = \tilde{\Xi}_x^{(-)}(z)zP_{x+1}\tilde{\Xi}_{x-1}(z)$$

が成り立つことに注意する . まず ,  $x \leq y \leq 0$  なる  $x, y \in \mathbb{Z}$  に対して ,

$$|u_y^{(-)}\rangle = \begin{bmatrix} z \\ \tilde{\lambda}_y^{(-)}(z)\tilde{f}_y^{(-)}(z) \end{bmatrix}, \quad |v_y^{(-)}\rangle = \begin{bmatrix} \bar{a}_y \\ \bar{b}_y \end{bmatrix}$$

とおく．但し， $\tilde{\lambda}_y^{(-)}(z) = za_y/(1 - b_y\tilde{f}_y^{(-)}(z))$ ．このとき，

$$\langle v_y^{(-)}, u_y^{(-)} \rangle = \lambda^{(-)}{}_y(z)$$

が成り立つ．故に，

$$\tilde{\Xi}_x^{(-)}(z)zP_{x+1} = |u_x^{(-)}\rangle\langle v_{x+1}^{(-)}|$$

が分かり， $\tilde{\Xi}_x(z)$  は以下のように計算される．

$$\begin{aligned}\tilde{\Xi}_x(z) &= |u_x^{(-)}\rangle\langle v_{x+1}^{(-)}|\tilde{\Xi}_{x+1}(z) \\ &= |u_x^{(-)}\rangle\langle v_{x+1}^{(-)}, u_{x+1}^{(-)} \rangle \cdots \langle v_{-1}^{(-)}, u_{-1}^{(-)} \rangle \langle v_0^{(-)}|\tilde{\Xi}_0(z) \\ &= \langle v_{x+1}^{(-)}, u_{x+1}^{(-)} \rangle \cdots \langle v_{-1}^{(-)}, u_{-1}^{(-)} \rangle |u_x^{(-)}\rangle\langle v_0^{(-)}|\tilde{\Xi}_0(z) \\ &= \tilde{\lambda}_{x+1}^{(-)}(z) \cdots \tilde{\lambda}_{-1}^{(-)}(z) \begin{bmatrix} z \\ \tilde{\lambda}_x^{(-)}(z)\tilde{f}_x^{(-)}(z) \end{bmatrix} [a_0 \ b_0]\tilde{\Xi}_0(z).\end{aligned}$$

特に， $x = -1$  の場合は，

$$\tilde{\Xi}_{-1}(z) = \begin{bmatrix} z \\ \tilde{\lambda}_{-1}^{(-)}(z)\tilde{f}_{-1}^{(-)}(z) \end{bmatrix} [a_0 \ b_0]\tilde{\Xi}_0(z)$$

とする．以上をまとめると，以下の命題 2 を得る．

**命題 2.**  $\Delta_x = \det(U_x)$  とおく．このとき， $\tilde{\Xi}_x$  ( $x \in \mathbb{Z}$ ) は以下のようになる．

1.  $x = 0$  の場合:

$$\tilde{\Xi}_0(z) = \frac{1}{\gamma(z)} \begin{bmatrix} 1 - b_0\tilde{f}_0^{(-)}(z) & d_0\tilde{f}_0^{(+)}(z) \\ a_0\tilde{f}_0^{(-)}(z) & 1 - c_0\tilde{f}_0^{(+)}(z) \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

2.  $|x| \geq 1$  の場合:

$$\tilde{\Xi}_x(z) = \begin{cases} \tilde{\lambda}_{x-1}^{(+)}(z) \cdots \tilde{\lambda}_1^{(+)}(z) \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_x^{(+)}(z)\tilde{f}_x^{(+)}(z) \\ z \end{bmatrix} [c_0 \ d_0]\tilde{\Xi}_0(z) & (x \geq 1), \\ \tilde{\lambda}_{x+1}^{(-)}(z) \cdots \tilde{\lambda}_{-1}^{(-)}(z) \begin{bmatrix} z \\ \tilde{\lambda}_x^{(-)}(z)\tilde{f}_x^{(-)}(z) \end{bmatrix} [a_0 \ b_0]\tilde{\Xi}_0(z) & (x \leq -1). \end{cases} \quad (3.10)$$

但し，

$$\begin{aligned}\gamma(z) &= 1 - c_0\tilde{f}_0^{(+)}(z) - b_0\tilde{f}_0^{(-)}(z) - \Delta_0\tilde{f}_0^{(-)}(z), \\ \tilde{\lambda}_x^{(+)}(z) &= zd_x/(1 - c_x\tilde{f}_x^{(+)}(z)), \quad \tilde{\lambda}_0^{(-)}(z) = za_x/(1 - b_x\tilde{f}_x^{(-)}(z)).\end{aligned}$$

とおいた．また， $\tilde{f}^{(\pm)}(z)$  は以下の関係式を満たす．

$$\begin{cases} \tilde{f}_x^{(+)}(z) = -\frac{z^2 \Delta_{x+1}}{c_{x+1}} \left( 1 - \frac{|a_{x+1}|^2}{1 - c_{x+1} \tilde{f}_{x+1}^{(+)}(z)} \right), \\ \tilde{f}_x^{(-)}(z) = -\frac{z^2 \Delta_{x-1}}{b_{x-1}} \left( 1 - \frac{|d_{x-1}|^2}{1 - b_{x-1} \tilde{f}_{x-1}^{(+)}(z)} \right) \end{cases}$$

## 第4章 本論文の先行研究

時間発展が空間に依存するタイプの量子ウォークに関する厳密な研究結果は少ない．ここでは，本論文の2つの研究に共通する先行研究，特に，1次元系において漸近挙動に関して厳密な結果が得られている量子ウォークに関する結果を挙げる．詳細は各原論文を参考にして頂きたい．

### 2 状態一様量子ウォークの漸近挙動

(1) Konno, N., J. Math. Soc. Jpn. **57** (2005)[21].

#### モデル

場所  $x \in \mathbb{Z}$  に関する時間発展作用素が以下のユニタリ行列で与えられる場所に関して一様な量子ウォーク．

$$U_x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{C}).$$

◀ 主な結果 ▶

$X_t$  : 時刻  $t$  における量子ウォーカーの場所を表す確率変数とする．このとき， $X_t/t$  は密度関数

$$d(x) = f_K(x; a) \left[ 1 - \left\{ |\alpha|^2 - |\beta|^2 + \frac{(a\alpha\bar{b}\beta)}{|a|^2} \right\} x \right] \quad (4.1)$$

を持つ確率変数に弱収束する．但し，

$$f_K(x; a) = \frac{\sqrt{1 - |a|^2}}{\pi(1 - x^2)\sqrt{|a|^2 - x^2}} I_{(-|a|, |a|)}(x).$$

ここで， $I_A(x)$  は，定義関数：

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A), \\ 0 & (x \notin A). \end{cases}$$

尚，対称な分布のときは，式 (4.1) の括弧  $\{ \}$  の中が 0 になる．



この研究により, 1次元系における空間に依存しない一様量子ウォークは局在化を起こさないことが数学的に示された.

### 非一様量子ウォークの漸近挙動

(2) Konno, N. *et al.*, QIP 12 (2013)[25].

### モデル

各場所  $x \in \mathbb{Z}$  に対する時間発展作用素が以下の形のユニタリ行列で与えられる量子ウォーク.

$$U_x = \begin{cases} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & (x \neq 0), \\ \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{bmatrix} & (x = 0). \end{cases}$$

但し,  $a, b, c, d, a_0, b_0, c_0, d_0 \in \mathbb{C}$ . また,  $\det(U_x) = \det(U_0)$  と仮定する.  
このモデルは, 原点にのみ不純物がある量子ウォークとみなすこともできる.

### ≪ 主な結果 ≫

量子ウォーカーが初期状態  $\varphi_0 = {}^T[\alpha, \beta]$ , ( $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ ) で原点から出発する場合を考える.

#### ● 時間平均極限測度

ここでの結果は, 本論文の研究で非常に重要になってくるため, 結果を詳細に記述する. 上記モデルに対する時間平均極限測度は各場所  $x \in \mathbb{Z}$  に関して以下のように表される.

定理 7. 1.  $x = 0$  の場合.

$$\bar{\mu}_\infty^{(\Psi_0)}(0) = I_{\{|c|^2 > m\}} \frac{1}{2} \left( \frac{2(|c|^2 - m)}{1 - 2m + |c|^2} \right)^2,$$

2.  $|x| \geq 1$  の場合.

$$\bar{\mu}_\infty^{(\Psi_0)}(x) = \bar{\mu}_\infty^{(\Psi_0)}(0) \frac{|c|^2(1-m)}{(|c|^2 - m^2)(1 - 2m + |c|^2)} \left( \frac{|a|^2}{1 - 2m + |c|^2} \right)^{|x|-1} \\ \times \begin{cases} (1 + |c_0|^2 - 2m^2/|c|^2)|\alpha|^2 + |a_0|^2|\beta|^2 + 2\Re(\alpha\bar{\beta}d_0(c_0 - m/\bar{c})) & (x \geq 1), \\ (1 + |c_0|^2 - 2m^2/|c|^2)|\beta|^2 + |a_0|^2|\alpha|^2 - 2\Re(\alpha\bar{\beta}d_0(c_0 - m/\bar{c})) & (x \leq -1). \end{cases}$$

• 弱収束極限測度

$X_t/t$  は密度関数

$$\rho(x) = C\delta(x) + w(x)f_K(x; |a|)$$

を持つ確率変数  $Z$  に弱収束する . 但し ,

$$w(x) = \frac{|c|^2 x^2}{(|c|^2 - m)^2 + (|c|^2 - m^2)x^2} \left[ \gamma(x) - |a_0|^2 \left\{ (|\alpha|^2 - |\beta|^2) \frac{2\Re(a\alpha\bar{b}\bar{\beta})}{|a_0|^2} \right\} \right].$$

ここで ,

$$\gamma(x) = \begin{cases} |\alpha|^2(1 - 2m + |c_0|^2) + |\beta|^2|a_0|^2 + 2\Re(a_0\alpha\overline{(b - b_0)\beta}) & (x \geq 0), \\ |\beta|^2(1 - 2m + |c_0|^2) + |\alpha|^2|a_0|^2 - 2\Re(a_0\alpha\overline{(b - b_0)\beta}) & (x < 0). \end{cases}$$

例 : アダマルウォーク+1-defect の場合

以下のようなモデルで具体的に漸近挙動を記述する測度を求める .

$$U_x = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & (x \neq 0) \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & (x = 0) \end{cases}$$

1. 時間平均極限測度 :

$$\bar{\mu}_\infty(0) = \frac{2}{9}, \tag{4.2}$$

$$\bar{\mu}_\infty(x) = \frac{4}{9} \left( \frac{1}{3} \right)^{|x|}. \tag{4.3}$$

2. 弱収束極限定理 :

$$\rho(x) = C\delta(x) + w(x)f_K(x; 1/\sqrt{2}),$$

但し ,

$$\begin{cases} C = \sum_x \bar{\mu}_\infty(x) = \frac{2}{3}, \\ w(x) = \frac{2x^2}{1 + 2x^2} [\gamma(x) - \{ (|\alpha|^2 - |\beta|^2) + \Re(\alpha\bar{\beta})x \}]. \end{cases}$$

ここで ,

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{2}\Re(\alpha\bar{\beta}) & (x \geq 1), \\ 1 - \sqrt{2}\Re(\alpha\bar{\beta}) & (x \leq -1). \end{cases}$$

## グローヴァーウォークの漸近挙動

(2)Inui, N., Konno, N., and Segawa, E., Phys. Rev. E, **72**, 056112, (2005)[15].

## モデル

3 状態のグローヴァーウォークの時間発展作用素は，以下のユニタリ行列で与えられる．

$$U^{(G,3)} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

$U^{(G,3)}$  を以下のように分解する．

$$U^{(G,3)} = U_L + U_0 + U_R.$$

但し，

$$U_L = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, U_0 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, U_R = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

であり， $U_L$  は量子ウォーカーの左向きの移動に， $U_0$  は量子ウォーカーの左向きの移動に対応し  $U_R$  は同じ場所にとどまることに対応する．ここで，時刻  $t$  場所  $x$  における量子ウォーカーの確率振幅を

$$\Psi_t(x) = \begin{bmatrix} \Psi_t^L(x) \\ \Psi_t^0(x) \\ \Psi_t^R(x) \end{bmatrix}.$$

とおく．このとき，3 状態グローヴァーウォークの時間発展は以下の漸化式で定義される．

$$\Psi_{t+1}(x) = U_L \Psi_t(x+1) + U_0 \Psi_t(x) + U_R \Psi_t(x-1), \quad (4.4)$$

## ≪ 主な結果 ≫

一次元系において，3 状態以上では起こり得ることを証明した．その例として，3 状態グローヴァーウォークに対して時間平均確率を導出し，局在化が起こることを示した．

## 第5章 Wojcik モデルの極限定理

本章の研究では, Wojcik *et al.* [47] で導入され研究された, アダマールウォークの原点だけに位相を加えた空間的に非一様な量子ウォークを扱う. 本論文ではこのモデルを「Wojcik モデル」と呼ぶことにする. 具体的には, はじめにパスの方法 [23] を用いて原点における時間平均極限測度を導出した. 続いてパスの重みの母関数を用いて原点以外の位置における時間平均極限測度を導出した. 量子ウォークの局在化は数学的には時間平均極限測度を用いて定式化される [28]. Konno *et al.* [25] によれば, 1次元系におけるいくつかの2状態量子ウォークでは時間平均極限測度は定常測度と深く関係している. そこで, Wojcik モデルの固有方程式をその解の母関数を用いて解き, 定常測度を導出し2つの測度の関係を調べた. また, 1次元系2状態の場所に関して一様な量子ウォークは局在化を起こさないことが知られている [21, 22]. 尚, パスの方法による時間平均極限測度の導出は今野紀雄教授 (横浜国立大学) が行ったものであり, 私は結果や導出過程の確認, 考察を行った. 本章ではまず, 本章の研究の研究背景を紹介し, 続いて Wojcik モデルの極限定理について研究した内容 [27, 28] をまとめる. 本章の研究は, アダマールウォークに一点不純物を加えた別のモデルに関する研究 [7] も参考にした.

### 5.1 研究背景

Wojcik *et al.* [47] は, 1次元系においてアダマールウォークの原点に位相  $\omega = e^{2\pi i\phi}$  ( $\phi \in (0, 1)$ ) が付加された量子ウォークに対して固有値問題を

$$(U^{(s)})^2\Psi = \lambda\Psi \quad (\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1) \quad (5.1)$$

を漸化式を用いて解き, 場所に関して一様な量子ウォークの1点に位相 (不純物) を付加すると顕著に局在化が起こることを示した. 但し,  $U^{(s)}$  はこのモデルの時間発展を定義する  $\infty \times \infty$  のユニタリ行列である. 固有値問題 (5.1) は2ステップ毎の状態に対応している.

Wojcik *et al.* [47] によれば, 固有値問題 (5.1) の解は以下ようになる.

$$\lambda_{\pm} = \frac{\omega - 2\omega^2 + \omega^3 \pm i\omega(1 - \omega + \omega^2)}{1 - 2\omega + 2\omega^2}. \quad (5.2)$$

また, 固有状態を

$$|\Psi\rangle = \sum_t (\alpha_t|0\rangle|t\rangle + \beta_t|1\rangle|t\rangle)$$

とおく. 但し,  $\alpha_t, \beta_t \in \mathbb{C}$ ,  $|0\rangle = {}^T[1, 0]$ ,  $|1\rangle = {}^T[0, 1]$  であることに注意する. 特に,  $(U^{(s)})^2$  に対する固有値問題を考えているので  $\bar{\alpha}_t = \alpha_{2t}$ ,  $\bar{\beta}_t = \beta_{2t}$  とおくと,

$$\bar{\alpha}_t^{(\pm)} = \begin{cases} Cx_{\pm}^t & (t \geq 1), \\ C(\omega \mp i\omega \pm i)x_{\pm}^{-t} & (t \leq -1), \end{cases}$$

$$\bar{\beta}_t^{(\pm)} = \begin{cases} C(1 - \omega \mp i\omega)x_{\pm}^t & (t \geq 1), \\ \mp iCx_{\pm}^{-t} & (t \leq -1) \end{cases}$$

を得る．但し，

$$x_{\pm} = \frac{1}{2 \cos(2\pi\phi) \mp \sin(2\pi\phi) - 3}, \quad C = \sqrt{\frac{1 + x_{\pm}}{2}}$$

である．Wojcik *et al.* [47] の研究では，時間平均極限測度や定常測度など局在化を表す具体的な数学的表式は得られていない．

このような背景から，本章の研究では Wojcik *et al.* [47] で導入され研究された量子ウォークに対して局在化に対応する時間平均極限測度，および定常測度を導出し 2 つの関係を明らかにすることで，Wojcik モデルと同じタイプの量子ウォークの漸近挙動，特に局在化の解析方法の構築につなげることを目的とした．

## 5.2 研究内容

### 5.2.1 モデル

まず，アダマール行列  $H$  を与える．

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

本章の研究では，各場所  $x \in \mathbb{Z}$  に対して時間発展作用素が以下のユニタリ行列で与えられる量子ウォークを扱う．

$$U_x = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & (x \neq 0), \\ \frac{\omega}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & (x = 0). \end{cases} \quad (5.3)$$

但し， $\omega = e^{2\pi i\phi}$ ， $\phi \in (0, 1)$  とする．このモデルはアダマールウォークの原点にのみ位相  $\omega = e^{2\pi i\phi}$  が付加された量子ウォークで， $\phi \rightarrow 0$  とすると，アダマールウォークになる．また， $\det U_0 = \omega \neq -1 = \det U_x (x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$  であることに注意する．本論文では，この量子ウォークを特に「Wojcik モデル」と呼ぶことにする．

## 5.2.2 時間発展

Wojcik モデルのユニタリ行列  $U_x$  を以下のように分解する .

$$U_x = P_x + Q_x \quad (x \in \mathbb{Z}).$$

但し ,

$$P_x = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & (|x| \geq 1), \\ \frac{\omega}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & (x = 0). \end{cases}, \quad Q_x = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & (|x| \geq 1), \\ \frac{\omega}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & (x = 0). \end{cases}$$

であり ,  $P_x$  は量子ウォーカーの左向きの移動に対応し  $Q_x$  は右向きの移動に対応する . ここで , 時刻  $t$  場所  $x$  における量子ウォーカーの確率振幅を

$$\Psi_t(x) = \begin{bmatrix} \Psi_t^L(x) \\ \Psi_t^R(x) \end{bmatrix}$$

とおくと , Wojcik モデルの時間発展は  $P_x, Q_x$  により以下の漸化式に従って定義される .

$$\Psi_{t+1}(x) = P_{x+1}\Psi_t(x+1) + Q_{x-1}\Psi_t(x-1)$$

即ち ,

$$\begin{bmatrix} \Psi_{t+1}^L(x) \\ \Psi_{t+1}^R(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{x+1}\Psi_t^L(x+1) + b_{x+1}\Psi_t^R(x+1) \\ c_{x-1}\Psi_t^L(x-1) + d_{x-1}\Psi_t^R(x-1) \end{bmatrix}.$$

量子ウォーカーが時刻  $t$  に場所  $x$  に存在する確率を

$$P(X_t = x) = \|\Psi_t(x)\|^2 = \langle \Psi_t(x) | \Psi_t(x) \rangle$$

で定義する .

時刻 0 における量子ウォーカーの原点における確率振幅を

$$|\Psi_0(0)\rangle = T[\alpha, \beta]$$

とする . 但し ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  であり ,  $T$  は転置作用素を表す .

## 5.3 研究結果

### 5.3.1 原点における時間平均極限測度

組み合わせ論的な手法であるパスの方法による Wojcik モデルの時間平均極限測度の研究結果 [28] をまとめる . 尚 , モデルは原点から出発する場合を考える . まず , 時刻  $2t$  での確率振

幅を

$$\Psi_{2t}(0) = \begin{bmatrix} \Psi_{2t}^L(0) \\ \Psi_{2t}^R(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

とおく．奇数時刻では原点に戻れないため  $\Psi_{2t+1}(0) = {}^T[\Psi_{2t+1}^L(0), \Psi_{2t+1}^R(0)] = {}^T[0, 0]$  である．すると， $\beta = i\eta\alpha$  ( $\eta = 1, -1$ ) のとき，確率振幅  $\Psi_{2t}(0) = {}^T[\Psi_{2t}^L(0), \Psi_{2t}^R(0)] = {}^T[\alpha, \beta]$  に対して，以下が成り立つ．証明は 5.3.2 節で行う．

命題 3.  $t \geq 1$  に対して，

$$\Psi_{2t}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^t \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_k) \in (\mathbb{Z}_{>})^k \\ a_1 + \dots + a_k = t}} \left( \prod_{j=1}^k r_{2a_j-1}^* \right) \left( \frac{\omega(-1 + \eta i)}{2} \right)^k \begin{bmatrix} 1 \\ \eta i \end{bmatrix}$$

となる．但し， $\mathbb{Z}_{>} = \{1, 2, \dots\}$ ，

$$\sum_{t=1}^{\infty} r_t^* z^t = \frac{-1 - z^2 + \sqrt{1 + z^4}}{z}.$$

命題 3 を用いると，以下の結果が得られる．命題 4 の証明は 5.3.3 節でまとめる．

命題 4. 初期状態として原点に  $\varphi = \varphi(\eta) = {}^T[1/\sqrt{2}, \eta i/\sqrt{2}]$ , ( $\eta = 1, -1$ ) をおく．このとき，パラメータ  $\phi \in (0, 1)$  に対して時刻  $2t$  での再帰確率の極限  $c(\phi)$  は以下で与えられる．

$$\begin{aligned} c(\phi) &= \lim_{t \rightarrow \infty} r_{2t}(0) \\ &= 4 \left( \frac{1 - \sqrt{2}C_-}{3 - 2\sqrt{2}C_-} \right)^2 I_{(1/4, 1)}(\phi) I_{\{1\}}(\eta) + 4 \left( \frac{1 - \sqrt{2}C_+}{3 - 2\sqrt{2}C_+} \right)^2 I_{(0, 3/4)}(\phi) I_{\{-1\}}(\eta). \end{aligned}$$

但し， $I_A(x) = 1 (x \in A) = 0 (x \notin A)$ ， $\omega = e^{2\pi i \phi}$  ( $\phi \in (0, 1)$ )，かつ

$$\begin{cases} C_- = \cos(2\pi\phi - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{\cos(2\pi\phi) + \sin(2\pi\phi)\}, \\ C_+ = \cos(2\pi\phi + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{\cos(2\pi\phi) - \sin(2\pi\phi)\} \end{cases}$$

とおいた．

命題 4 より， $\phi \in (0, 1)$  ならば， $c(\phi) > 0$  となる．これは，空間的に非一様性が出てくると局在化する可能性が出てくることを示している．しかし， $\eta = 1$ ， $\phi \in (0, 1/4]$  のときや  $\eta = -1$ ， $\phi \in [3/4, 1)$  のときは局在化しない．また，アダマールウォーク ( $\phi \rightarrow 0$ ) の場合にも， $c(\phi) = 0$  となり局在化が起きないことが分かる．命題 4 の 2 つの初期条件  $\varphi = \varphi(\eta) = {}^T[1/\sqrt{2}, \eta i/\sqrt{2}]$  ( $\eta = 1, -1$ ) の結果を合わせると，一般の初期状態，即ち， $\varphi = {}^T[\alpha, \beta]$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ ) に対する確率振幅，および時間平均極限測度が得られる．

はじめに，以下の関係式が成り立つことに注意する．即ち， $\varphi = {}^T[\alpha, \beta]$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ ) のとき， $t \geq 1$  に対して，

$$\begin{aligned}\Psi_{2t}(0) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^t \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_k) \in (\mathbb{Z}_{>})^k \\ a_1 + \dots + a_k = t}} \left( \prod_{j=1}^k \Xi_{2a_j}^* \right) \varphi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^t \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_k) \in (\mathbb{Z}_{>})^k \\ a_1 + \dots + a_k = t}} \left( \prod_{j=1}^k r_{2a_j-1}^* \right) \left( \frac{\omega}{2} \right)^k \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

但し， $\mathbb{Z}_{>} = \{1, 2, \dots\}$ ，

$$\sum_{t=1}^{\infty} r_t^* z^t = \frac{-1 - z^2 + \sqrt{1 + z^4}}{z}.$$

さらに，

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1+i)^k \left( \frac{\alpha - i\beta}{2} \right) + (-1-i)^k \left( \frac{\alpha + i\beta}{2} \right) \\ (-1+i)^k i \left( \frac{\alpha - i\beta}{2} \right) + (-1-i)^k (-i) \left( \frac{\alpha + i\beta}{2} \right) \end{bmatrix}$$

が成り立つことに注意する．故に，以下の補題 1 が成り立つ．

**補題 1.**  $\varphi = {}^T[\alpha, \beta]$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ ) のとき， $t \geq 1$  に対して，

$$\begin{aligned}\Psi_{2t}(0) &= \sum_{k=1}^t \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_k) \in (\mathbb{Z}_{>})^k \\ a_1 + \dots + a_k = t}} \left( \prod_{j=1}^k r_{2a_j-1}^* \right) \left( \frac{\omega(-1+i)}{2} \right)^k \left( \frac{\alpha - i\beta}{2} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \\ &\quad + \sum_{k=1}^t \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_k) \in (\mathbb{Z}_{>})^k \\ a_1 + \dots + a_k = t}} \left( \prod_{j=1}^k r_{2a_j-1}^* \right) \left( \frac{\omega(-1-i)}{2} \right)^k \left( \frac{\alpha + i\beta}{2} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

従って，初期状態  $\varphi = \varphi(\eta) = {}^T[1/\sqrt{2}, \eta i/\sqrt{2}]$  ( $\eta = 1, -1$ ) に対する結果をそれぞれ  $(\alpha - \eta i\beta)/\sqrt{2}$  倍して加えれば，一般の初期状態  $\varphi = {}^T[\alpha, \beta]$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ ) に対する結果が得られる．



定理 8.  $t \in \mathbb{Z}(t \geq 1)$  に対して，以下の関係がある．

$$\Psi_{2t}^{(L, \mathfrak{R})}(0) \sim (\alpha - i\beta) \frac{1 - E_+}{3 - 2E_+} \cos(t\theta_0) I_{(1/4, 1)}(\phi) + (\alpha + i\beta) \frac{1 - E_-}{3 - 2E_-} \cos(t\theta_0) I_{(0, 3/4)}(\phi),$$

$$\Psi_{2t}^{(L, \mathfrak{S})}(0) \sim (\alpha - i\beta) \frac{1 - E_+}{3 - 2E_+} \frac{S - C}{|S - C|} \sin(t\theta_0) I_{(1/4, 1)}(\phi) + (\alpha + i\beta) \frac{1 - E_-}{3 - 2E_-} \frac{S + C}{|S + C|} \sin(t\theta_0) I_{(0, 3/4)}(\phi),$$

$$\Psi_{2t}^{(R, \mathfrak{R})}(0) \sim -(\alpha - i\beta) \frac{1 - E_+}{3 - 2E_+} \frac{S - C}{|S - C|} \sin(t\theta_0) I_{(1/4, 1)}(\phi) + (\alpha + i\beta) \frac{1 - E_-}{3 - 2E_-} \frac{S + C}{|S + C|} \sin(t\theta_0) I_{(0, 3/4)}(\phi),$$

$$\Psi_{2t}^{(R, \mathfrak{S})}(0) \sim (\alpha - i\beta) \frac{1 - E_+}{3 - 2E_+} \cos(t\theta_0) I_{(1/4, 1)}(\phi) - (\alpha + i\beta) \frac{1 - E_-}{3 - 2E_-} \cos(t\theta_0) I_{(0, 3/4)}(\phi).$$

従って，

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_\infty(0) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{r_{2t}(0)}{2} \\ &= \left( \frac{1 - E_+}{3 - 2E_+} \right)^2 |\alpha - i\beta|^2 I_{(1/4, 1)}(\phi) + \left( \frac{1 - E_-}{3 - 2E_-} \right)^2 |\alpha + i\beta|^2 I_{(0, 3/4)}(\phi). \\ &= \left( \frac{1 - \sqrt{2}C_-}{3 - 2\sqrt{2}C_-} \right)^2 |\alpha - i\beta|^2 I_{(1/4, 1)}(\phi) + \left( \frac{1 - \sqrt{2}C_+}{3 - 2\sqrt{2}C_+} \right)^2 |\alpha + i\beta|^2 I_{(0, 3/4)}(\phi). \end{aligned}$$

但し，

$$\begin{cases} E_\pm = C \pm S = \cos(2\pi\phi) \pm \sin(2\pi\phi), \\ C_\pm = \cos\left(2\pi\phi \pm \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{\cos(2\pi\phi) \mp \sin(2\pi\phi)\}. \end{cases}$$

とおいた．

### 5.3.2 命題 3 の証明

簡単のために，しばらく量子ウォーカーは原点から出発し初期状態は  $\varphi = {}^T[1/\sqrt{2}, i/\sqrt{2}]$ ，または  $\varphi = {}^T[1/\sqrt{2}, -i/\sqrt{2}]$  とする．この節では，パスの方法で命題 3 を示す．そのためにまず，領域  $\mathbb{Z}_\geq = \{0, 1, 2, \dots\}$  の場所  $m (\geq 1)$  から出発するアダマールウォークを考える．このモデルではユニタリ行列は， $x \geq 1$  でしか関係してこないため，原点での  $P_0$  と  $Q_0$  の効果は無視出来る．従って，場所  $x \geq 1$  に対して，

$$U_x = H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (x \geq 1)$$

を考えるので,

$$P_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (x \geq 1).$$

となる. そこで,  $P_x = P, Q_x = Q (x \geq 1)$  とおく.

はじめに,  $\Xi_n^{(\infty, m)}$ :  $m$  から出発して時刻  $t$  で初めて原点に達するパスの総和とし, 以下の  $R$  と  $S$  を導入する.

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

注意:  $P, Q, R, S$  は, 内積を  $\langle A|B \rangle = \text{tr}(A^*B)$  とする  $2 \times 2$  行列全体からなるベクトル空間の正規直交基底になる [29].

従って,  $\Xi_t^{(\infty, m)}$  は, ある  $p_t^{(\infty, m)}, q_t^{(\infty, m)}, r_t^{(\infty, m)}, s_t^{(\infty, m)} \in \mathbb{C}$  が存在して以下のように一意的に表される.

$$\Xi_t^{(\infty, m)} = p_t^{(\infty, m)} P + q_t^{(\infty, m)} Q + r_t^{(\infty, m)} R + s_t^{(\infty, m)} S.$$

$\Xi_t^{(\infty, m)}$  の定義より,  $m \geq 1$  に対して,

$$\Xi_t^{(\infty, m)} = \Xi_{t-1}^{(\infty, m-1)} P + \Xi_{t-1}^{(\infty, m+1)} Q$$

が成り立つ. これより, 以下が導かれる.

$$\begin{cases} p_t^{(\infty, m)} = \frac{1}{\sqrt{2}} p_{t-1}^{(\infty, m-1)} + \frac{1}{\sqrt{2}} r_{t-1}^{(\infty, m-1)}, \\ q_t^{(\infty, m)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} q_{t-1}^{(\infty, m+1)} + \frac{1}{\sqrt{2}} s_{t-1}^{(\infty, m+1)}, \\ r_t^{(\infty, m)} = \frac{1}{\sqrt{2}} p_{t-1}^{(\infty, m+1)} - \frac{1}{\sqrt{2}} r_{t-1}^{(\infty, m+1)}, \\ s_t^{(\infty, m)} = \frac{1}{\sqrt{2}} q_{t-1}^{(\infty, m-1)} + \frac{1}{\sqrt{2}} s_{t-1}^{(\infty, m-1)}. \end{cases}$$

また,  $\Xi_t^{(\infty, m)}$  の定義より, 量子ウォーカーは最後に左向きに移動して原点に到達するので,  $P \dots P$  と  $P \dots Q$  の2つの場合のみを考えればよい. 故に,  $q_t^{(\infty, m)} = s_t^{(\infty, m)} = 0 (t \geq 1)$  が分かる. ここで,  $p_t^{(\infty, m)}$  と  $r_t^{(\infty, m)}$  を計算するために以下のような母関数を導入する:

$$p^{(\infty, m)}(z) = \sum_{t=1}^{\infty} p_t^{(\infty, m)} z^t, \quad r^{(\infty, m)}(z) = \sum_{t=1}^{\infty} r_t^{(\infty, m)} z^t.$$

従って,

$$\begin{cases} p^{(\infty, m)}(z) = \frac{z}{\sqrt{2}} p^{(\infty, m-1)}(z) + \frac{z}{\sqrt{2}} r^{(\infty, m-1)}(z), \\ r^{(\infty, m)}(z) = \frac{z}{\sqrt{2}} p^{(\infty, m+1)}(z) - \frac{z}{\sqrt{2}} r^{(\infty, m+1)}(z). \end{cases}$$

を得る．これより， $p^{(\infty,m)}(z)$  と  $r^{(\infty,m)}(z)$  は以下の同じ漸化式を満たす．

$$\begin{cases} p^{(\infty,m+2)}(z) + \sqrt{2} \left(\frac{1}{z} - z\right) p^{(\infty,m+1)}(z) - p^{(\infty,m)}(z) = 0, \\ r^{(\infty,m+2)}(z) + \sqrt{2} \left(\frac{1}{z} - z\right) r^{(\infty,m+1)}(z) - r^{(\infty,m)}(z) = 0. \end{cases}$$

また，その特性方程式の根は，

$$\lambda_{\pm} = \frac{-1 + z^2 \pm \sqrt{1 + z^4}}{\sqrt{2}z}.$$

の2つである． $\Xi_t^{(\infty,1)}$  の定義より，

$$p_t^{(\infty,1)} = 0 \quad (t \geq 2), \quad p_1^{(\infty,1)} = 1$$

が得られる．従って， $p^{(\infty,1)}(z) = z$ ．ここで， $\lim_{m \rightarrow \infty} p^{(\infty,m)}(z) < \infty$  に注意すると，以下が得られる．

$$p^{(\infty,m)}(z) = z\lambda_+^{m-1}, \quad r^{(\infty,m)}(z) = \frac{-1 + \sqrt{1 + z^4}}{z} \lambda_+^{m-1}.$$

従って， $m = 1$  に対して，

$$r^{(\infty,1)}(z) = \frac{-1 + \sqrt{1 + z^4}}{z}$$

となる．

次に，領域  $\mathbb{Z}_{\leq} = \{0, -1, -2, \dots\}$  の場所  $m (\leq -1)$  から出発するアダマルウォークを考えると，同様にして，

$$q^{(-\infty,m)}(z) = z\lambda_-^{m+1}, \quad s^{(-\infty,m)}(z) = \frac{1 - \sqrt{1 + z^4}}{z} \lambda_-^{m+1}$$

が導かれる．従って， $m = -1$  に対して，

$$s^{(-\infty,-1)}(z) = \frac{1 - \sqrt{1 + z^4}}{z}$$

を得る．

注意：  $t \geq 1$  に対して， $r_t^{(\infty,1)} + s_t^{(-\infty,-1)} = 0$  の関係がある．

ここで， $\Xi_t^+ = \Xi_t^{(\infty,1)}Q_0$  と  $\Xi_t^- = \Xi_t^{(-\infty,-1)}P_0$  とおく．但し，

$$P_0 = \omega P = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_0 = \omega Q = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

である．即ち， $\Xi_t^+$  ( $\Xi_t^-$ ) は領域  $\mathbb{Z}_{\geq}$  ( $\mathbb{Z}_{\leq}$ ) に制限したときに時刻  $t$  で初めて原点に達するすべてのパスの和，ということになる．これより，以下の補題2が成り立つ．

補題 2. (i)  $t \geq 4$  かつ  $t$  が偶数の場合 .

$$\begin{aligned}\Xi_t^+ &= r_{t-1}^{(\infty,1)} RQ_0 = \frac{\omega r_{t-1}^{(\infty,1)}}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \Xi_t^- &= s_{t-1}^{(-\infty,-1)} SP_0 = \frac{\omega s_{t-1}^{(-\infty,-1)}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

但し ,

$$\sum_{t=1}^{\infty} r_t^{(\infty,1)} z^t = \frac{-1 + \sqrt{1+z^4}}{z}, \quad \sum_{t=1}^{\infty} s_t^{(-\infty,-1)} z^t = \frac{1 - \sqrt{1+z^4}}{z}.$$

(ii)

$$\Xi_2^+ = PQ_0 = \frac{-\omega}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Xi_2^- = QP_0 = \frac{\omega}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

が成り立つ .

(iii)  $t$  が奇数の場合 .

$$\Xi_t^+ = \Xi_t^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

ここで ,  $\Xi_t^* = \Xi_t^+ + \Xi_t^-$  とおくと , この補題と  $s_t^{(-\infty,-1)} = -r_t^{(\infty,1)}$  ( $t \geq 1$ ) より ,

$$\Xi_t^* = \frac{\omega r_{t-1}^*}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

が得られる . 但し ,

$$r_t^* = \begin{cases} (-1)^{m-1} \frac{(2m-1)!}{2^{2m-1}(m-1)!m!} & (t = 4m-1, m \geq 1), \\ 0 & (t \neq 4m-1, t \geq 2, m \geq 1), \\ -1 & (t = 1), \end{cases}$$

とおいた . 具体的には ,

$$r_1^* = -1, r_2^* = 0, r_3^* = 1/2, r_4^* = r_5^* = r_6^* = 0, \dots$$

など . このとき ,  $r_t^*$  の母関数は ,

$$\sum_{t=1}^{\infty} r_t^* z^t = \frac{-1 - z^2 + \sqrt{1+z^4}}{z}$$

となる． $\Xi_t^*$  の定義より，

$$\Psi_{2t}(0) = \sum_{k=1}^t \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_k) \in (\mathbb{Z}_{>})^k: \\ a_1 + \dots + a_k = t}} \left( \prod_{j=1}^k \Xi_{2a_j}^* \right) \varphi.$$

但し， $\mathbb{Z}_{>} = \{1, 2, \dots\}$ ．また， $\eta = 1, -1$  に対して，

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^k \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \eta i \end{bmatrix} = \frac{(-1 + \eta i)^k}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \eta i \end{bmatrix}.$$

補題 2 の (iii) より，

$$\left( \prod_{j=1}^k \Xi_{2a_j}^* \right) \varphi = \left( \prod_{j=1}^k r_{2a_j-1}^* \right) \left( \frac{\omega}{2} \right)^k \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^k \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \eta i \end{bmatrix}$$

が成り立つ．従って，命題 3 を得る．

### 5.3.3 命題 4 の証明

命題 3 を用いて，命題 4 を証明する．はじめに， $x_t = r_{2t-1}^*$  と  $u = \omega(-1 + \eta i)/2$  とおく．このとき，命題 3 に注意すると，

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{\infty} \Psi_{2t}^L(0) z^{2t} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{t=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^t \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_k) \in (\mathbb{Z}_{>})^k: \\ a_1 + \dots + a_k = t}} \left( \prod_{j=1}^k x_{a_j} \right) u^k \right\} z^{2t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{t=k}^{\infty} \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_k) \in (\mathbb{Z}_{>})^k: \\ a_1 + \dots + a_k = t}} \left( \prod_{j=1}^k x_{a_j} \right) z^{2t} \right\} u^k \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (-1 - z^2 + \sqrt{1 + z^4}) u \right\}^k \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(-1 - z^2 + \sqrt{1 + z^4}) u}{1 - (-1 - z^2 + \sqrt{1 + z^4}) u} \end{aligned}$$

を得る．3 番目の等式は，例えば  $k = 2$  のとき，

$$\begin{aligned} \sum_{t=2}^{\infty} \sum_{\substack{(a_1, a_2) \in (\mathbb{Z}_{>})^2: \\ a_1 + a_2 = t}} x_{a_1} x_{a_2} z^{2t} &= \left( \sum_{t=1}^{\infty} r_{2t-1}^* z^{2t-1} \right)^2 z^2 = \left( \sum_{t=1}^{\infty} r_t^* z^t \right)^2 z^2 \\ &= \left( \frac{-1 - z^2 + \sqrt{1 + z^4}}{z} \right)^2 z^2 \\ &= (-1 - z^2 + \sqrt{1 + z^4})^2. \end{aligned}$$

となることから得られる．同様にして，一般に，

$$\sum_{t=k}^{\infty} \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_k) \in (\mathbb{Z}_>)^k: \\ a_1 + \dots + a_k = t}} \left( \prod_{j=1}^k x_{a_j} \right) z^{2t} = (-1 - z^2 + \sqrt{1 + z^4})^k \quad (k \geq 1)$$

が成り立つ．

1.  $\Psi_t^L(0)$  の母関数について:

初期条件  $\Psi_0^L(0) = 1/\sqrt{2}$  より，

$$\sum_{t=0}^{\infty} \Psi_t^L(0) z^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{1 - Zu}$$

を得る．但し， $Z = -1 - z^2 + \sqrt{1 + z^4}$ ．

2.  $\Psi_t^R(0)$  の母関数について:

初期条件  $\Psi_0^R(0) = i\eta/\sqrt{2}$  より，同様にして，

$$\sum_{t=0}^{\infty} \Psi_t^R(0) z^t = \frac{\eta i}{\sqrt{2}} \frac{1}{1 - Zu}$$

を得る．これより，

$$\begin{cases} \sum_{t=0}^{\infty} \Psi_t^{(L, \Re)}(0) z^t = \eta \sum_{t=0}^{\infty} \Psi_t^{(R, \Im)}(0) z^t = \frac{2 + (C + \eta S)Z}{\sqrt{2}\{2 + 2(C + \eta S)Z + Z^2\}}, \\ \sum_{t=0}^{\infty} \Psi_t^{(L, \Im)}(0) z^t = (-\eta) \sum_{t=0}^{\infty} \Psi_t^{(R, \Re)}(0) z^t = \frac{(\eta C - S)Z}{\sqrt{2}\{2 + 2(C + \eta S)Z + Z^2\}} \end{cases}$$

が導かれる．但し， $\Psi_t^{(A, \Re)}(0) (\Psi_t^{(A, \Im)}(0)) = \Re(\Im)(\Psi_t^{(A)}(0)) (A = L, R)$ ．また， $C = \cos(2\pi\phi)$ ， $S = \sin(2\pi\phi)$ ．これより， $E = C + \eta S$  として，

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} \Psi_{2t}^{(L, \Re)}(0) w^t &= \eta \sum_{t=0}^{\infty} \Psi_{2t}^{(R, \Im)}(0) w^t \\ &= \frac{4 - 3E + 2(1 - E)^2 w + (2 - E)w^2 + (2 - E)(1 + w)\sqrt{1 + w^2}}{2\sqrt{2} \{3 - 2E + 2(1 - E)^2 w + (3 - 2E)w^2\}}, \\ \sum_{t=0}^{\infty} \Psi_{2t}^{(L, \Im)}(0) w^t &= (-\eta) \sum_{t=0}^{\infty} \Psi_{2t}^{(R, \Re)}(0) w^t \\ &= \frac{(S - \eta C)(1 + 2(1 - E)w + w^2 - (1 - w)\sqrt{1 + w^2})}{2\sqrt{2} \{3 - 2E + 2(1 - E)^2 w + (3 - 2E)w^2\}} \end{aligned}$$

となる．これより，以下の補題が成り立つ．

補題 3. 初期状態として，原点に  $\varphi = \varphi(\eta) = {}^T[1/\sqrt{2}, \eta i/\sqrt{2}]$  ( $\eta = 1, -1$ ) をおく．このとき，

$$\begin{cases} \Psi_{2t}^{(L, \Re)}(0) = \eta \Psi_{2t}^{(R, \Im)}(0) \sim \frac{\sqrt{2}(1-E)}{3-2E} \cos(t\theta_0) \times \{I_{(1/4,1)}(\phi) I_{\{1\}}(\eta) + I_{(0,3/4)}(\phi) I_{\{-1\}}(\eta)\}, \\ \Psi_{2t}^{(L, \Im)}(0) = (-\eta) \Psi_{2t}^{(R, \Re)}(0) \sim \frac{\sqrt{2}(1-E)}{3-2E} \frac{S-\eta C}{|S-\eta C|} \sin(t\theta_0) \times \{I_{(1/4,1)}(\phi) I_{\{1\}}(\eta) + I_{(0,3/4)}(\phi) I_{\{-1\}}(\eta)\}. \end{cases}$$

但し，

$$\cos \theta_0 = -\frac{2(1-E)^2}{3-2E}, \quad \sin \theta_0 = \frac{(2-E)|S-C|}{3-2E}$$

とおいた．

注意：  $f(t) \sim g(t)$  は，  $f(t)/g(t) \rightarrow 1$  ( $t \rightarrow \infty$ ) を表す．

また，  $r_{2t}(0)$  の定義より，

$$r_{2t}(0) = |\Psi_{2t}^{(L, \Re)}(0)|^2 + |\Psi_{2t}^{(L, \Im)}(0)|^2 + |\Psi_{2t}^{(R, \Re)}(0)|^2 + |\Psi_{2t}^{(R, \Im)}(0)|^2.$$

であるから，求めたい結論が得られる．

以下，  $\eta = 1$  の場合の計算の概略をまとめる．その後，  $\eta = -1$  の場合の結果を紹介する．はじめに，

$$\sum_{t=0}^{\infty} \Psi_{2t}^{(L, \Re)}(0) w^t = A_1(w) + A_2(w)$$

とおく．但し，

$$\begin{cases} A_1(w) = \frac{4-3E+2(1-E)^2w+(2-E)w^2}{2\sqrt{2}\{3-2E+2(1-E)^2w+(3-2E)w^2\}}, \\ A_2(w) = \frac{(2-E)(1+w)\sqrt{1+w^2}}{2\sqrt{2}\{3-2E+2(1-E)^2w+(3-2E)w^2\}} \end{cases}$$

(i)  $A_1(w)$  について：

2次方程式

$$1 + \frac{2(1-E)^2}{3-2E}w + w^2 = 0 \tag{5.5}$$

の 2 根を  $\gamma = e^{i\theta_0}$  と  $\bar{\gamma} = e^{-i\theta_0}$  とおくと ,

$$\cos \theta_0 = -\frac{(1-E)^2}{3-2E} \quad (< 0)$$

の関係がある . 従って , この場合 ,

$$A_1(w) = \frac{4-3E+2(1-E)^2w+(2-E)w^2}{2\sqrt{2}(3-2E)(w-\gamma)(w-\bar{\gamma})} \quad (5.6)$$

となる .

注意 : 関数  $f(x)$  が級数展開

$$f(z) = \sum_{t=0}^{\infty} f_t z^t$$

を持つとき ,  $[z^t](f(z)) = f_t$  と表す . ここで ,

$$\frac{1}{w-\gamma} = -\frac{1}{\gamma(1-w/\gamma)} = -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{w}{\gamma}\right)^t, \quad \frac{1}{w-\bar{\gamma}} = -\frac{1}{\bar{\gamma}(1-w/\bar{\gamma})} = -\frac{1}{\bar{\gamma}} \left(\frac{w}{\bar{\gamma}}\right)^t$$

より ,

$$[w^t] \left(\frac{1}{w-\gamma}\right) = -\gamma^{-(t+1)} = -e^{-i(t+1)\theta_0}, \quad [w^t] \left(\frac{1}{w-\bar{\gamma}}\right) = -\bar{\gamma}^{-(t+1)} = -\gamma^{t+1} = -e^{i(t+1)\theta_0}$$

を得る . 従って ,

$$[w^t](A_1(w)) \sim [w^t] \left(\frac{4-3E+2(1-E)^2\gamma+(2-E)\gamma^2}{2\sqrt{2}(3-2E)(\gamma-\bar{\gamma})(w-\gamma)}\right) + [w^t] \left(\frac{4-3E+2(1-E)^2\bar{\gamma}+(2-E)\bar{\gamma}^2}{2\sqrt{2}(3-2E)(\bar{\gamma}-\gamma)(w-\bar{\gamma})}\right)$$

となる . また , 式 (5.6) を用いると , 以下のように計算される .

$$\begin{aligned} [w^t](A_1(w)) &\sim \frac{1-E}{2\sqrt{2}(3-2E)} \times [w^t] \left(\frac{1-\gamma^2}{(\gamma-\bar{\gamma})(w-\gamma)} + \frac{1-\bar{\gamma}^2}{(\bar{\gamma}-\gamma)(w-\bar{\gamma})}\right) \\ &= -\frac{1-E}{2\sqrt{2}(3-2E)} \times \left\{ \frac{1-\gamma^2}{\gamma-\bar{\gamma}} \gamma^{-(t+1)} + \frac{1-\bar{\gamma}^2}{\bar{\gamma}-\gamma} \bar{\gamma}^{-(t+1)} \right\} \\ &= -\frac{1-E}{2\sqrt{2}(3-2E)} \times \Re \left(\frac{1-\gamma^2}{\gamma-\bar{\gamma}} \gamma^{-(t+1)}\right) \\ &= -\frac{1-E}{2\sqrt{2}(3-2E)} \times \Re \left(\frac{\bar{\gamma}-\gamma}{\gamma-\bar{\gamma}} \gamma^{-t}\right) \\ &= \frac{1-E}{2\sqrt{2}(3-2E)} \cos(t\theta_0). \end{aligned}$$



(ii)  $A_2(w)$  について :  $A_1(w)$  と同様にして ,

$$\begin{aligned}
[w^t](A_2(w)) &\sim -\frac{2-E}{2\sqrt{2}(3-2E)} \times \left\{ \frac{(1+\gamma)\sqrt{1+\gamma^2}}{\gamma-\bar{\gamma}} \gamma^{-(t+1)} + \frac{(1+\bar{\gamma})\sqrt{1+\bar{\gamma}^2}}{\bar{\gamma}-\gamma} \bar{\gamma}^{-(t+1)} \right\} \\
&= -\frac{2-E}{\sqrt{2}(3-2E)} \times \Re \left( \frac{(1+\gamma)\sqrt{1+\gamma^2}}{\gamma-\bar{\gamma}} \gamma^{-(t+1)} \right) \\
&= -\frac{(2-E)\sqrt{-2\cos\theta_0}}{\sqrt{2}(3-2E)} \times \Re \left( \frac{(\bar{\gamma}+1)(-i)e^{i\theta_0/2}}{\gamma-\bar{\gamma}} \gamma^{-t} \right) \\
&= \frac{(2-E)\sqrt{-\cos\theta_0}}{3-2E} \times \left( \frac{\cos(t\theta_0)}{2\sin(\theta_0/2)} \right). \tag{5.7}
\end{aligned}$$

を得る . 但し ,

$$\sqrt{1+\gamma^2} = \sqrt{-2\cos\theta_0} \left( \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - i\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \right), \quad \sqrt{1+\bar{\gamma}^2} = \overline{\sqrt{1+\gamma^2}}$$

を用いた . 式 (5.7) に

$$\sqrt{-\cos\theta_0} = \frac{|1-E|}{\sqrt{3-2E}}, \quad \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) = \frac{2-E}{\sqrt{2}\sqrt{3-2E}}$$

を代入すると ,

$$[w^t](A_2(w)) \sim \frac{|1-E|}{\sqrt{2}(3-2E)} \cos(t\theta_0)$$

となる . 以上より ,

$$\Psi_{2n}^{(L,\Re)}(0) = [w^t](A_1(w) + A_2(w)) \sim \frac{1-E+|1-E|}{\sqrt{2}(3-2E)} \cos(t\theta_0) = \frac{\sqrt{2}(1-E)}{3-2E} \cos(t\theta_0) I_{(1/4,1)}(\phi)$$

が導かれる .

注意 :  $1-E > 0$  と  $\phi \in (1/4, 1)$  は同値である . また ,  $\Psi_{2t}^{(L,\Re)}(0) = \Psi_{2t}^{(R,\Im)}(0)$  .

同様にして ,

$$\sum_{t=0}^{\infty} \Psi_{2t}^{(L,\Im)}(0)w^t = B_1(w) + B_2(w)$$

とおく . 但し ,

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1(w) = \frac{(S-C)(1+2(1-E)w+w^2)}{2\sqrt{2}\{3-2E+2(1-E)^2w+(3-2E)w^2\}}, \\ B_2(w) = -\frac{(S-C)(1-w)\sqrt{1+w^2}}{2\sqrt{2}\{3-2E+2(1-E)^2w+(3-2E)w^2\}}. \end{array} \right.$$

(iii)  $B_1(w)$  について :

同様にして .

$$\begin{aligned} [w^t](B_1(w)) &\sim \frac{C-S}{\sqrt{2}(3-2E)} \times \Re \left( \frac{\gamma + \bar{\gamma} + 2(1-E)}{\gamma - \bar{\gamma}} \gamma^{-t} \right) \\ &\sim \frac{S-C}{\sqrt{2}(3-2E)} \times \frac{\cos \theta_0 + 1 - E}{\sin \theta_0} \times \sin(t\theta_0) \\ &= \frac{1-E}{\sqrt{2}(3-2E)} \times \frac{S-C}{|S-C|} \times \sin(t\theta_0) \end{aligned}$$

. が導かれる . 但し ,

$$\cos \theta_0 = -\frac{(1-E)^2}{3-2E}, \quad \sin \theta_0 = \frac{|S-C|(2-E)}{3-2E}$$

(iv)  $B_2(w)$  について : 同様にして ,

$$\begin{aligned} [w^t](B_2(w)) &\sim \frac{S-C}{\sqrt{2}(3-2E)} \Re \left( \frac{(\bar{\gamma}-1)\sqrt{-2\cos\theta_0}(\sin(\theta_0/2) - i\cos(\theta_0/2))}{\gamma - \bar{\gamma}} \gamma^{-t} \right) \\ &= \frac{S-C}{2(3-2E)} \times \frac{\sqrt{-\cos\theta_0}}{\cos(\theta_0/2)} \times \sin(t\theta_0) \end{aligned} \quad (5.8)$$

が得られる . 但し ,

$$\sqrt{1+\gamma^2} = \sqrt{-2\cos\theta_0} \left( \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - i\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \right), \quad \sqrt{1+\bar{\gamma}^2} = \overline{\sqrt{1+\gamma^2}}$$

を用いた . また , 式 (5.8) に

$$\sqrt{-\cos\theta_0} = \frac{|1-E|}{\sqrt{3-2E}}, \quad \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) = \frac{|S-C|}{\sqrt{2}\sqrt{3-2E}}.$$

を代入すると ,

$$[w^t](B_2(w)) \sim \frac{|1-E|}{\sqrt{2}(3-2E)} \times \frac{S-C}{|S-C|} \times \sin(t\theta_0)$$

が得られる . 以上より ,

$$\begin{aligned} \Psi_{2t}^{(L, \mathfrak{S})}(0) &= [w^t](B_1(w) + B_2(w)) \\ &\sim \frac{1-E + |1-E|}{\sqrt{2}(3-2E)} \frac{S-C}{|S-C|} \sin(t\theta_0) \\ &= \frac{\sqrt{2}(1-E)}{3-2E} \frac{S-C}{|S-C|} \sin(t\theta_0) I_{(1/4,1)}(\phi) \end{aligned}$$

が導かれる．

注意：  $1 - E > 0$  と  $\phi \in (1/4, 1)$  は同値である．また，  $\Psi_{2t}^{(L, \Im)}(0) = -\Psi_{2t}^{(R, \Re)}(0)$  ．

以上の議論より，以下の補題 4 が得られる．但し，  $E$  を  $E_+$  とおき換えていることに注意する．

補題 4. 初期状態  $\varphi = {}^T[1/\sqrt{2}, i/\sqrt{2}]$  に対して，

$$\begin{cases} \Psi_{2t}^{(L, \Re)}(0) = \Psi_{2t}^{(R, \Im)}(0) \sim \frac{\sqrt{2}(1 - E_+)}{3 - 2E_+} \cos(t\theta_0) I_{(1/4, 1)}(\phi), \\ \Psi_{2t}^{(L, \Im)}(0) = -\Psi_{2t}^{(R, \Re)}(0) \sim \frac{\sqrt{2}(1 - E_+)}{3 - 2E_+} \frac{S - C}{|S - C|} \sin(t\theta_0) I_{(1/4, 1)}(\phi). \end{cases}$$

が成り立つ．但し，  $E_+ = C + S = \cos(2\pi\phi) + \sin(2\pi\phi)$  ．

これより，

$$r_{2t}(0) = |\Psi_{2t}^{(L, \Re)}(0)|^2 + |\Psi_{2t}^{(L, \Im)}(0)|^2 + |\Psi_{2t}^{(R, \Re)}(0)|^2 + |\Psi_{2t}^{(R, \Im)}(0)|^2$$

の関係を用いると，

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} r_{2t}(0) &= \lim_{t \rightarrow \infty} 2 \times \frac{2(1 - E_+)^2}{(3 - 2E_+)^2} (\cos^2(t\theta_0) + \sin^2(t\theta_0)) I_{(1/4, 1)}(\phi) \\ &= \frac{4(1 - E_+)^2}{(3 - 2E_+)^2} I_{(1/4, 1)}(\phi) \end{aligned}$$

が導かれる．従って，  $\mu_\infty(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} r_{2t}(0)/2$  に注意すると，以下の補題 5 が得られる．

補題 5. 初期状態  $\varphi = {}^T[1/\sqrt{2}, i/\sqrt{2}]$  に対して，

$$\bar{\mu}_\infty(0) = \frac{2(1 - E_+)^2}{(3 - 2E)^2} I_{(1/4, 1)}(\phi) = 2 \times \left( \frac{1 - \sqrt{2}C_-}{3 - 2\sqrt{2}C_-} \right)^2 I_{(1/4, 1)}(\phi)$$

となる．但し，

$$\begin{cases} E_+ = C + S = \cos(2\pi\phi) + \sin(2\pi\phi), \\ C_- = \cos\left(2\pi\phi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{\cos(2\pi\phi) + \sin(2\pi\phi)\}. \end{cases}$$

$\eta = -1$ ，即ち，  $\varphi = {}^T[1/\sqrt{2}, -i/\sqrt{2}]$  のときも全く同様にして，以下を得る．

補題 6. 初期状態  $\varphi = {}^T[1/\sqrt{2}, -i/\sqrt{2}]$  に対して,

$$\begin{aligned}\Psi_{2t}^{(L, \mathfrak{R})}(0) &= -\Psi_{2t}^{(R, \mathfrak{S})}(0) \sim \frac{\sqrt{2}(1 - E_-)}{3 - 2E_-} \cos(t\theta_0) I_{(0,3/4)}(\phi), \\ \Psi_{2t}^{(L, \mathfrak{S})}(0) &= \Psi_{2t}^{(R, \mathfrak{R})}(0) \sim \frac{\sqrt{2}(1 - E_-)}{3 - 2E_-} \frac{S + C}{|S + C|} \sin(t\theta_0) I_{(0,3/4)}(\phi)\end{aligned}$$

となる．従って,

$$\bar{\mu}_\infty(0) = \frac{2(1 - E_-)^2}{(3 - 2E_-)^2} I_{(0,3/4)}(\phi) = 2 \times \left( \frac{1 - \sqrt{2}C_+}{3 - 2\sqrt{2}C_+} \right)^2 I_{(0,3/4)}(\phi)$$

が得られる．但し,

$$\begin{cases} E_- = C - S = \cos(2\pi\phi) - \sin(2\pi\phi), \\ C_- = \cos\left(2\pi\phi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{\cos(2\pi\phi) + \sin(2\pi\phi)\}.\end{cases}$$

以上より, 原点における初期状態  $\varphi = \varphi(\eta) = {}^T[1/\sqrt{2}, \eta i/\sqrt{2}]$  ( $\eta = 1, -1$ ) に対して, 時刻  $2t$  における原点の確率振幅  $\Psi_{2t}(0)$  は以下ようになる．

$$\begin{aligned}\Psi_{2t}^{(L, \mathfrak{R})}(0) &= \eta \Psi_{2t}^{(R, \mathfrak{S})}(0) \sim \frac{\sqrt{2}(1 - E)}{3 - 2E} \cos(t\theta_0) \times \{I_{(1/4,1)}(\phi) I_{\{1\}}(\eta) + I_{(0,3/4)}(\phi) I_{\{-1\}}(\eta)\}, \\ \Psi_{2t}^{(L, \mathfrak{S})}(0) &= (-\eta) \Psi_{2t}^{(R, \mathfrak{R})}(0) \sim \frac{\sqrt{2}(1 - E)}{3 - 2E} \frac{S - \eta C}{|S - \eta C|} \sin(t\theta_0) \times \{I_{(1/4,1)}(\phi) I_{\{1\}}(\eta) + I_{(0,3/4)}(\phi) I_{\{-1\}}(\eta)\}.\end{aligned}$$

ここで,

$$\cos \theta_0 = -\frac{2(1 - E)^2}{3 - 2E}, \quad \sin \theta_0 = \frac{(2 - E)|S - C|}{3 - 2E}$$

とおいた．従って,

$$\begin{aligned}\mu_\infty(0) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{r_{2t}(0)}{2} \\ &= 2 \left( \frac{1 - \sqrt{2}C_-}{3 - 2\sqrt{2}C_-} \right)^2 I_{(1/4,1)}(\phi) I_{\{1\}}(\eta) + 2 \left( \frac{1 - \sqrt{2}C_+}{3 - 2\sqrt{2}C_+} \right)^2 I_{(0,3/4)}(\phi) I_{\{-1\}}(\eta)\end{aligned}$$

を得る．以上より, 命題 4 の証明が完結する．

### 5.3.4 $x \in \mathbb{Z}$ における時間平均極限測度

時空間母関数法による Wojcik モデルの時間平均極限測度の研究結果 [28] をまとめる．尚, モデルは原点から出発する場合を考える．

定理 9. 初期状態を  $\varphi = {}^T[\alpha, \beta]$  とおく . 但し ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ .  $\alpha = ae^{i\phi_1}$ ,  $\beta = be^{i\phi_2}$ ,  $\phi_j \in [0, 2\pi)$  ( $j = 1, 2$ ).  $C_-$ , および  $C_+$  を以下のようにおく .

$$\begin{cases} C_- = \cos\left(2\pi\phi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\cos(2\pi\phi) + \sin(2\pi\phi)\}, \\ C_+ = \cos\left(2\pi\phi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\cos(2\pi\phi) - \sin(2\pi\phi)\}. \end{cases}$$

このとき , Wojcik モデルの各場所  $x \in \mathbb{Z}$  に対する時間平均極限測度は以下のようになる .

1.  $x = 0$  の場合 .

$$\bar{\mu}_\infty(0) = \bar{\mu}^{(1)}(0) + \bar{\mu}^{(2)}(0).$$

2.  $x \neq 0$  の場合 .

$$\bar{\mu}_\infty(x) = (2 - \sqrt{2}C_+) \left(\frac{1}{3 - 2\sqrt{2}C_+}\right)^{|x|} \bar{\mu}^{(1)}(0) + (2 - \sqrt{2}C_-) \left(\frac{1}{3 - 2\sqrt{2}C_-}\right)^{|x|} \bar{\mu}^{(2)}(0).$$

但し ,

$$\begin{aligned} \bar{\mu}^{(1)}(0) &= \frac{(1 - \sqrt{2}C_+)^2}{(3 - 2\sqrt{2}C_+)^2} |\alpha + i\beta|^2 I_{(0,3/4)}(\phi), \\ \bar{\mu}^{(2)}(0) &= \frac{(1 - \sqrt{2}C_-)^2}{(3 - 2\sqrt{2}C_-)^2} |\alpha - i\beta|^2 I_{(1/4,1)}(\phi) \end{aligned}$$

とおいた .

### 5.3.5 定理 9 の証明

ここでは , Wojcik モデルに対して時空間母関数法 [25] により時間平均極限測度を導出する . 第 3 章でまとめたように時空間母関数法は組み合わせ論的な考え方に基づく解析手法である . フーリエ解析 [11] や停留位相法 [19] は , 空間に依存しない一様な量子ウォークの解析には有効であるが , ここで用いる時空間母関数法は空間に依存する非一様な量子ウォークにも適用できる場合がある . まず , 導出に必要な用語や補題などを準備する .

□ 準備

しばらく , 以下のユニタリ行列で定義される場所に依存する量子ウォークを考える .

$$U_x = \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ c_x & d_x \end{bmatrix} \quad (x \in \mathbb{Z}).$$

添え字の  $x$  は量子ウォーカーの場所を表す .  $U_x$  は次のように  $P_x, Q_x$  2 つの行列に分解できる .

$$U_x = P_x + Q_x .$$

但し,

$$P_x = \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_x & d_x \end{bmatrix}$$

であることに注意する．ここで，時刻  $t$  までに量子ウォーカーが左に  $l$  回，右に  $m$  回動くパスの重みを表す記号  $\Xi_t(l, m)$  を導入する，即ち，

$$\Xi_t(l, m) = \sum_{l_j, m_j} P_{x_{l_1}}^{l_1} Q_{x_{m_1}}^{m_1} P_{x_{l_2}}^{l_2} Q_{x_{m_2}}^{m_2} \cdots P_{x_{l_n}}^{l_n} Q_{x_{m_n}}^{m_n}.$$

但し,

$$l + m = t \quad -l + m = x, \quad \sum_i l_i = l, \quad \sum_j m_j = m, \quad \sum_{\gamma=l_i, m_j} |x_\gamma| = x$$

であることに注意する．ここで，量子ウォークの局在化を調べる際に役立つ公式を紹介する． $\mu_t(x)$  の時間平均極限測度はパスの重みの母関数  $\tilde{\Xi}_x(z) \equiv \sum_{t \geq 0} \Xi_t(l, m) z^t$  の留数のノルムの 2 乗で記述される．

系 1. 量子ウォーカーが初期状態  $\varphi \in \mathbb{C}^2$  で原点から出発する 1 次元離散時間量子ウォークの時間平均は，

$$\bar{\mu}_\infty(x) = \sum_{\theta_s} \|Res(\tilde{\Xi}_x(z); z = e^{i\theta_s})\varphi\|^2$$

と表される．但し， $\{e^{i\theta_s}\}$  は  $\tilde{\Xi}_x(z)$  の特異点の集合である．  
また， $z \in \mathbb{C}$  は単位円周上の点とする．

証明は系 1 を主軸に， $\tilde{\Xi}_x(z)$  の留数を求めることに帰着される．Wojcik モデルの  $\tilde{\Xi}_x(z)$  に関する便利な表現として以下の補題がある．補題 7 は，参考文献 [25] の Lemma 3.1 から得られる．

補題 7. 1.  $x = 0$  の場合．

$$\tilde{\Xi}_0(z) = \frac{1}{1 - \sqrt{2}e^{2\pi i\phi}\tilde{f}_0(z) + e^{4\pi i\phi}\{\tilde{f}_0(z)\}^2} \begin{bmatrix} 1 - \frac{e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}}\tilde{f}_0(z) & -\frac{e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}}\tilde{f}_0(z) \\ \frac{e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}}\tilde{f}_0(z) & 1 - \frac{e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}}\tilde{f}_0(z) \end{bmatrix}.$$

2.  $|x| \geq 1$  の場合．

$$\tilde{\Xi}_x(z) = \begin{cases} (\tilde{\lambda}_x^{(+)}(z))^{x-1} \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_x^{(+)}(z)\tilde{f}_x^{(+)}(z) \\ z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}}, -\frac{e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tilde{\Xi}_0(z) & (x \geq 1), \\ (-\tilde{\lambda}_x^{(-)}(z))^{|x|-1} \begin{bmatrix} z \\ -\tilde{\lambda}_x^{(-)}(z)\tilde{f}_x(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}}, \frac{e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tilde{\Xi}_0(z) & (x \leq -1). \end{cases}$$

但し,  $\tilde{f}_x^{(\pm)}(z)$  は次の2次方程式の解である.

$$\{\tilde{f}_x^{(\pm)}(z)\}^2 - \sqrt{2}(1+z^2)\tilde{f}_x^{(\pm)}(z) + z^2 = 0. \quad (5.9)$$

また,  $\tilde{\lambda}_x^{(\pm)}(z)$  は以下を満たす.

$$\tilde{\lambda}_x(z) = \frac{z}{\tilde{f}_x^{(+)}(z) - \sqrt{2}}, \quad \tilde{\lambda}_x(z) = \frac{z}{\sqrt{2} - \tilde{f}_x^{(-)}(z)}. \quad (5.10)$$

ここで,  $x \in \mathbb{Z}$  に対して,

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_x^{(\pm)}(z) &= \tilde{\lambda}_0^{(\pm)}(z), & \tilde{\lambda}^{(+)}(z) &= -\tilde{\lambda}^{(-)}(z), \\ \tilde{f}_x^{(\pm)}(z) &= \tilde{f}_0^{(\pm)}(z), & \tilde{f}^{(+)}(z) &= \tilde{f}^{(-)}(z) \end{aligned}$$

となることに注意し(複合同順), それぞれ  $\tilde{\lambda}^{(\pm)}(z)$ ,  $\tilde{f}(z)$  とおく.  $\omega = iz = ie^{i\theta}$  とおくと, 以下のように  $\tilde{f}(\omega)$  と  $\tilde{\lambda}^{(\pm)}(\omega)$  を得る.

$$\begin{cases} \tilde{f}(\omega) = \pm \frac{i}{\sqrt{2}} \{(\omega + \omega^{-1}) - \sqrt{(\omega + \omega^{-1})^2 - 2}\}, \\ \tilde{\lambda}^{(\pm)}(\omega) = \mp \frac{\omega}{\sqrt{2}} \{(\omega - \omega^{-1}) + \sqrt{(\omega - \omega^{-1})^2 + 2}\}. \end{cases} \quad (5.11)$$

また, 根号は以下のようになる.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sqrt{(\omega + \omega^{-1})^2 - 2} = \begin{cases} -2 \operatorname{sgn}(\sin \theta) \sqrt{\sin^2 \theta - 1/2} & (|\sin \theta| \geq 1/\sqrt{2}), \\ -2i \operatorname{sgn}(\cos \theta) \sqrt{\sin^2 \theta - 1/2} & (|\sin \theta| < 1/\sqrt{2}). \end{cases}$$

従って,

$$\tilde{f}(z) = e^{i(\theta + \tilde{\phi}(\theta))} \quad (5.12)$$

を得る. 但し,

$$\begin{cases} \cos \tilde{\phi}(\theta) = \sqrt{2} \cos \theta, \\ \sin \tilde{\phi}(\theta) = \operatorname{sgn}(\sin \theta) \sqrt{1 - 2 \cos^2 \theta} \end{cases}$$

とおいた. また,

$$\tilde{\lambda}^{(\pm)}(z) = \mp i \{ \sqrt{2} \sin \theta - \operatorname{sgn}(\sin \theta) \sqrt{1 - 2 \cos^2 \theta} \} \quad (5.13)$$

となる.

□  $\tilde{\Xi}_x(z)$  の特異点

補題 7 の  $\tilde{\Xi}_0(z)$  の分母を  $\tilde{\Lambda}_0(z) = 1 - \sqrt{2}\omega\tilde{f}(z)x + \omega^2\{\tilde{f}(z)\}^2$  とおく .  $\tilde{\Xi}_x(z)$  の特異点は ,  $\tilde{\Lambda}_0(z) = 0$  を満たす  $z(\in \mathbb{C})$  であるが , これは

$$\tilde{f}(z) = e^{-2\pi i\phi \pm \pi/4}$$

と同値である . 式 (5.12) より , これは

$$e^{i(\theta + \tilde{\phi}(\theta))} = e^{-2\pi i\phi \pm \pi/4}$$

と同値である .

1.  $e^{i(\theta + \tilde{\phi}(\theta))} = e^{-2\pi i\phi - \pi/4}$  の場合 .  
このとき ,

$$e^{i(2\pi\phi + \theta + \tilde{\phi})} = e^{-\pi i/4}$$

が成り立つ . 従って ,

$$2\pi\phi + \theta + \tilde{\phi}(\theta) = -\frac{\pi}{4} \quad (5.14)$$

となる . ここで ,  $\sqrt{2}\cos\theta = \cos\tilde{\phi}(\theta)$  に注意すると , 式 (5.14) より

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\cos\theta &= \cos\tilde{\phi}(\theta) = \cos\left(-\frac{\pi}{4} - 2\pi\phi - \theta\right) \\ &= \cos\left(2\pi\phi + \frac{\pi}{4} + \theta\right) \end{aligned} \quad (5.15)$$

が導かれる .  $\cos(2\pi\phi + \pi/4) = C_+$  ,  $S_+ = \sin(2\pi\phi + \pi/4)$  とおくと , 式 (5.15) は

$$\sqrt{2}\cos\theta = C_+ \cos\theta - S_+ \sin\theta$$

と書ける . これより ,

$$\sin\theta = \frac{C_+ - \sqrt{2}}{S_+}$$

を得る . また ,  $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$  に注意すると ,

$$\cos\theta = \pm \frac{S_+}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}C_+}}$$

が得られる . 以上より , 1. の場合の特異点は以下ようになる .



$$\begin{cases} (\cos \theta^{(1)}, \sin \theta^{(1)}) = \left( \frac{S_+}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}C_+}}, \frac{C_+ - \sqrt{2}}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}C_+}} \right), \\ (\cos \theta^{(2)}, \sin \theta^{(2)}) = \left( -\frac{S_+}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}C_+}}, -\frac{C_+ - \sqrt{2}}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}C_+}} \right). \end{cases} \quad (5.16)$$

2.  $e^{i(\theta + \tilde{\phi}(\theta))} = e^{-2\pi i\phi + \pi/4}$  の場合 .  
このとき ,

$$e^{i(2\pi\phi + \theta + \tilde{\phi}(\theta))} = e^{\pi i/4}$$

が成り立つ . 従って ,

$$2\pi\phi + \theta + \tilde{\phi}(\theta) = \frac{\pi}{4} \quad (5.17)$$

となる . ここで ,  $\sqrt{2} \cos \theta = \cos(\tilde{\phi}(\theta))$  に注意すると , 式 (5.17) より

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cos \theta = \cos \tilde{\phi}(\theta) &= \cos \left( \frac{\pi}{4} - 2\pi\phi - \theta \right) \\ &= \cos \left( -\frac{\pi}{4} + 2\pi\phi + \theta \right) \end{aligned} \quad (5.18)$$

が導かれる .  $C_- = \cos(2\pi\phi - \pi/4)$ ,  $S_- = \sin(2\pi\phi - \pi/4)$  とおくと , 式 (5.18) は

$$\sqrt{2} \cos \theta = C_- \cos \theta - S_- \sin \theta$$

と書ける . これより ,

$$\sin \theta = \frac{C_- - \sqrt{2}}{S_-}$$

を得る . また ,  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  に注意すると ,

$$\cos \theta = \pm \frac{S_-}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}C_-}}$$

が得られる . 以上より , 2. の場合の特異点は以下ようになる .

$$\begin{cases} (\cos \theta^{(3)}, \sin \theta^{(3)}) = \left( \frac{S_-}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}C_-}}, \frac{C_- - \sqrt{2}}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}C_-}} \right), \\ (\cos \theta^{(4)}, \sin \theta^{(4)}) = \left( -\frac{S_-}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}C_-}}, -\frac{C_- - \sqrt{2}}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}C_-}} \right). \end{cases} \quad (5.19)$$

□ 時間平均極限測度の構成

各場所  $x(x \in \mathbb{Z})$  ごとに時間平均極限測度を求める .

1.  $x = 0$  の場合 .

補題 7 より ,  $\tilde{\Xi}_0(z)\varphi$  は以下のように書ける .

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi}_0(z)\varphi &= \frac{1}{1 - \sqrt{2}\omega\tilde{f}(z) + \omega^2\{\tilde{f}(z)\}^2} \begin{bmatrix} 1 - \frac{e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}}\tilde{f}(z) & -\frac{e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}}\tilde{f}(z) \\ \frac{e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}}\tilde{f}(z) & 1 - \frac{e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}}\tilde{f}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\tilde{\Lambda}_0(z)} \begin{bmatrix} \alpha \left(1 - \frac{e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}}\tilde{f}(z)\right) - \frac{\beta e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}}\tilde{f}(z) \\ \frac{\alpha e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}}\tilde{f}(z) + \beta \left(1 - \frac{e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}}\tilde{f}(z)\right) \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

ここで ,  $\|Res(\tilde{\Xi}_0(z)\varphi : z = e^{i\theta})\|^2$  を次で定義する .

$$\begin{aligned} \|Res(\tilde{\Xi}_0(z)\varphi : z = e^{i\theta})\|^2 &= \left| Res \left( \frac{\alpha \left(1 - \frac{e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}}\tilde{f}(z)\right) - \frac{\beta e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}}\tilde{f}(z)}{\tilde{\Lambda}_0(z)} : z = e^{i\theta} \right) \right|^2 \\ &\quad + \left| Res \left( \frac{\frac{\alpha e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}}\tilde{f}(z) + \beta \left(1 - \frac{e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}}\tilde{f}(z)\right)}{\tilde{\Lambda}_0(z)} : z = e^{i\theta} \right) \right|^2 . \end{aligned}$$

$$Res \left( \frac{\alpha \left(1 - \frac{e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}}\tilde{f}(z)\right) - \frac{\beta e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}}\tilde{f}(z)}{\tilde{\Lambda}_0(z)} : z = e^{i\theta} \right) = \frac{\alpha \left(1 - \frac{e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}}\tilde{f}(e^{i\theta})\right) - \frac{\beta e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}}\tilde{f}(e^{i\theta})}{\tilde{\Lambda}'_0(e^{i\theta})} .$$

の関係に注意すると ,

$$\left| Res \left( \frac{\alpha \left(1 - \frac{e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}}\tilde{f}(z)\right) - \frac{\beta e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}}\tilde{f}(z)}{\tilde{\Lambda}_0(z)} : z = e^{i\theta} \right) \right|^2 = \frac{\left| \alpha \left(1 - \frac{e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}}\tilde{f}(z)\right) - \frac{\beta e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}}\tilde{f}(z) \right|^2}{|\tilde{\Lambda}'_0(e^{i\theta})|^2} .$$

となる．同様に，

$$\left| \operatorname{Res} \left( \frac{\frac{\alpha e^{2\pi i \phi}}{\sqrt{2}} \tilde{f}(z) + \beta \left( 1 - \frac{e^{2\pi i \phi}}{\sqrt{2}} \tilde{f}(z) \right)}{\tilde{\Lambda}_0(z)} : z = e^{i\theta} \right) \right|^2 = \frac{\left| \frac{\alpha e^{2\pi i \phi}}{\sqrt{2}} \tilde{f}(z) + \beta \left( 1 - \frac{e^{2\pi i \phi}}{\sqrt{2}} \tilde{f}(z) \right) \right|^2}{|\tilde{\Lambda}'_0(e^{i\theta})|^2}.$$

となる．従って， $\bar{\mu}_\infty(x)$  は以下で表される．

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_\infty(x) &= \sum_{\theta_s} \|\operatorname{Res}(\tilde{\Xi}_x(z); z = e^{i\theta_s})\varphi\|^2 \\ &= \sum_{\theta_s} \frac{1}{|\tilde{\Lambda}'_0(e^{i\theta})|^2} \left\{ \left| \alpha \left( 1 - \frac{e^{2\pi i \phi}}{\sqrt{2}} \tilde{f}(z) \right) - \frac{\beta e^{2\pi i \phi}}{\sqrt{2}} \tilde{f}(z) \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{\alpha e^{2\pi i \phi}}{\sqrt{2}} \tilde{f}(z) + \beta \left( 1 - \frac{e^{2\pi i \phi}}{\sqrt{2}} \tilde{f}(z) \right) \right|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

各特異点  $e^{i\theta_s}$  に対して式 (5.20) を計算する．そのために以下の項目を計算する．

$$(1) \quad \frac{1}{|\tilde{\Lambda}'_0(e^{i\theta_s})|^2}.$$

$z = e^{i\theta}$ ,  $\tilde{f}(z) = e^{i(\theta + \tilde{\phi}(\theta))}$  に注意すると，

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}'_0(e^{i\theta}) &= \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \tilde{\Lambda}_0(e^{i\theta})}{\partial \theta} \\ &= -ie^{-i\theta} \left\{ \sqrt{2}i \left( 1 + \frac{\partial \tilde{\phi}(\theta)}{\partial \theta} \right) e^{i(\theta + \tilde{\phi}(\theta))} (\sqrt{2}\omega e^{i(\theta + \tilde{\phi}(\theta))} - 1)\omega \right\} \end{aligned}$$

である．故に，

$$\begin{aligned} |\tilde{\Lambda}'_0(e^{i\theta})|^2 &= 2 \left| 1 + \frac{\partial \tilde{\phi}(\theta)}{\partial \theta} \right|^2 \times \left| \sqrt{2}\omega e^{i(\theta + \tilde{\phi}(\theta))} - 1 \right|^2 \\ &= 2 \left| 1 + \frac{\partial \tilde{\phi}(\theta)}{\partial \theta} \right|^2 \times \left| \sqrt{2}e^{\pi i/4} - 1 \right|^2 \\ &= 2 \left| 1 + \frac{\partial \tilde{\phi}(\theta)}{\partial \theta} \right|^2 \end{aligned} \quad (5.21)$$

が導かれる．

(a)  $e^{i(\theta+\tilde{\phi}(\theta))} = e^{i(-2\pi i\phi-\pi/4)}$  の場合.

$\cos \tilde{\phi}(\theta) = \sqrt{2} \cos \theta$  より,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\phi}(\theta)}{\partial \theta} &= \sqrt{2} \frac{\sin \theta}{\sin \tilde{\phi}(\theta)} = \sqrt{2} \frac{|\sin \theta|}{\sqrt{1-2\cos^2 \theta}} = \frac{2-\sqrt{2}C_+}{|\sqrt{2}C_+-1|} \\ &= \begin{cases} \frac{2-\sqrt{2}C_+}{\sqrt{2}C_+-1} & (C_+ \geq 1/\sqrt{2}), \\ \frac{2-\sqrt{2}C_+}{1-\sqrt{2}C_+} & (C_+ < 1/\sqrt{2}) \end{cases} \end{aligned}$$

を得る. 従って,

$$1 + \frac{\partial \tilde{\phi}(\theta)}{\partial \theta} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}C_+-1} & (\phi \in (0, 1/4]), \\ \frac{3-2\sqrt{2}C_+}{1-\sqrt{2}C_+} & (\phi \in [1/4, 1)) \end{cases}$$

となる. パスの方法と  $\phi$  の範囲を合わせると,  $\phi \in [1/4, 1)$  となり,

$$|\tilde{\Lambda}'_0(e^{i\theta})|^2 = 2 \left( \frac{3-2\sqrt{2}C_+}{1-\sqrt{2}C_+} \right)^2,$$

即ち,

$$\frac{1}{|\tilde{\Lambda}'_0(e^{i\theta})|^2} = \frac{(1-\sqrt{2}C_+)^2}{2(3-2\sqrt{2}C_+)^2} \quad (5.22)$$

が得られる.

(b)  $e^{i(\theta+\tilde{\phi}(\theta))} = e^{i(-2\pi i\phi+\pi/4)}$  の場合.

(a) の場合と同様にして, 以下を得る.

$$\frac{1}{|\tilde{\Lambda}'_0(e^{i\theta})|^2} = \frac{(1-\sqrt{2}C_-)^2}{2(3-2\sqrt{2}C_-)^2}. \quad (5.23)$$

但し,  $\phi \in (0, 3/4)$ .

$$(2) \left| \alpha \left( 1 - \frac{e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}} \tilde{f}(z) \right) - \frac{\beta e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}} \tilde{f}(z) \right|^2 \text{ と } \left| \frac{\alpha e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}} \tilde{f}(z) + \beta \left( 1 - \frac{e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}} \tilde{f}(z) \right) \right|^2.$$

(a)  $e^{i(\theta+\tilde{\phi}(\theta))} = e^{i(-2\pi i\phi-\pi/4)}$  の場合.

$$\begin{aligned}
& \cdot \left| \alpha \left( 1 - \frac{e^{2\pi i \phi}}{\sqrt{2}} e^{i(\theta + \tilde{\phi}(\theta))} \right) - \beta \frac{e^{2\pi i \phi}}{\sqrt{2}} e^{i(\theta + \tilde{\phi}(\theta))} \right|^2 \\
&= \left| \alpha \left( 1 - \frac{e^{2\pi i \phi}}{\sqrt{2}} e^{-2\pi i \phi - \pi/4} \right) - \beta \frac{e^{2\pi i \phi}}{\sqrt{2}} e^{-2\pi i \phi - \pi/4} \right|^2 = \frac{1}{2} (|\alpha|^2 + |\beta|^2) - \Re\{\alpha \bar{\beta} i\}, \\
& \cdot \left| \alpha \frac{e^{2\pi i \phi}}{\sqrt{2}} e^{i(\theta + \tilde{\phi}(\theta))} + \beta \left( 1 - \frac{e^{2\pi i \phi}}{\sqrt{2}} e^{i(\theta + \tilde{\phi}(\theta))} \right) \right|^2 \\
&= \left| \alpha \left( 1 - \frac{e^{2\pi i \phi}}{\sqrt{2}} e^{-2\pi i \phi - \pi/4} \right) - \beta \frac{e^{2\pi i \phi}}{\sqrt{2}} e^{-2\pi i \phi - \pi/4} \right|^2 = \frac{1}{2} (|\alpha|^2 + |\beta|^2) - \Re\{\alpha \bar{\beta} i\}.
\end{aligned}$$

従って,

$$\|Res(\tilde{\Xi}_0(z)\varphi : z = e^{i\theta_s})\|^2 = \frac{1}{|\tilde{\Lambda}'_0(e^{i\theta_s})|^2} |\alpha + i\beta|^2$$

となる. ここで, 式 (5.22) より,

$$\|Res(\tilde{\Xi}_0(z)\varphi : z = e^{i\theta_s})\|^2 = \left( \frac{1 - \sqrt{2}C_+}{3 - 2\sqrt{2}C_+} \right)^2 |\alpha + i\beta|^2 \times I_{(0,3/4)}(\phi) \quad (5.24)$$

が導かれる.

(b)  $e^{i(\theta + \tilde{\phi}(\theta))} = e^{i(-2\pi i \phi + \pi/4)}$  の場合.

$$\begin{aligned}
& \cdot \left| \alpha \left( 1 - \frac{e^{2\pi i \phi}}{\sqrt{2}} e^{i(\theta + \tilde{\phi}(\theta))} \right) - \beta \frac{e^{2\pi i \phi}}{\sqrt{2}} e^{i(\theta + \tilde{\phi}(\theta))} \right|^2 \\
&= \left| \alpha \left( 1 - \frac{e^{2\pi i \phi}}{\sqrt{2}} e^{-2\pi i \phi + \pi/4} \right) - \beta \frac{e^{2\pi i \phi}}{\sqrt{2}} e^{-2\pi i \phi + \pi/4} \right|^2 = \frac{1}{2} (|\alpha|^2 + |\beta|^2) + \Re\{\alpha \bar{\beta} i\}, \\
& \cdot \left| \alpha \frac{e^{2\pi i \phi}}{\sqrt{2}} e^{i(\theta + \tilde{\phi}(\theta))} + \beta \left( 1 - \frac{e^{2\pi i \phi}}{\sqrt{2}} e^{i(\theta + \tilde{\phi}(\theta))} \right) \right|^2 \\
&= \left| \alpha \left( 1 - \frac{e^{2\pi i \phi}}{\sqrt{2}} e^{-2\pi i \phi + \pi/4} \right) - \beta \frac{e^{2\pi i \phi}}{\sqrt{2}} e^{-2\pi i \phi + \pi/4} \right|^2 = \frac{1}{2} (|\alpha|^2 + |\beta|^2) + \Re\{\alpha \bar{\beta} i\}.
\end{aligned}$$

従って,

$$\|Res(\tilde{\Xi}_0(z)\varphi : z = e^{i\theta_s})\|^2 = \frac{1}{|\tilde{\Lambda}'_0(e^{i\theta_s})|^2} |\alpha - i\beta|^2 \quad (5.25)$$

となる. 式 (5.23) より,

$$\|Res(\tilde{\Xi}_0(z)\varphi : z = e^{i\theta_s})\|^2 = \frac{(1 - \sqrt{2}C_+)^2}{2(3 - 2\sqrt{2}C_+)^2} |\alpha - i\beta|^2 \times I_{(1/4,0)}(\phi) \quad (5.26)$$

が導かれる.

3式 (5.20), (5.24), (5.26) より ,

$$\bar{\mu}_\infty(0) = \left( \frac{1 - \sqrt{2}C_+}{3 - 2\sqrt{2}C_+} \right)^2 |\alpha + i\beta|^2 I_{(0,3/4)}(\phi) + \left( \frac{1 - \sqrt{2}C_-}{3 - 2\sqrt{2}C_-} \right)^2 |\alpha - i\beta|^2 I_{(1/4,1)}(\phi)$$

が得られる .

2.  $x \geq 1$  の場合 .

補題7より  $\tilde{\Xi}_x(z)\varphi$  は以下のように書ける .

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi}_x(z)\varphi &= \begin{cases} (\tilde{\lambda}(z))^{x-1} \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}(z)\tilde{f}(z) \\ z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2\pi i\phi} & -e^{2\pi i\phi} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \frac{1}{\tilde{\Lambda}_0(z)} \begin{bmatrix} \gamma^L(z) \\ \gamma^R(z) \end{bmatrix} & (x \geq 1), \\ (-\tilde{\lambda}(z))^{|x|-1} \begin{bmatrix} z \\ -\tilde{\lambda}(z)\tilde{f}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2\pi i\phi} & e^{2\pi i\phi} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \frac{1}{\tilde{\Lambda}_0(z)} \begin{bmatrix} \gamma^L(z) \\ \gamma^R(z) \end{bmatrix} & (x \leq -1), \end{cases} \\ &= \begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{(\tilde{\lambda}(z))^x \tilde{f}(z) \frac{e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}} (\gamma^L(z) - \gamma^R(z))}{\tilde{\Lambda}_0(z)}}{(\tilde{\lambda}(z))^{x-1} z \frac{e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}} (\gamma^L(z) - \gamma^R(z))} \tilde{\Lambda}_0(z)} & (x \geq 1), \\ \begin{bmatrix} \frac{(-\tilde{\lambda}(z))^{|x|-1} z \frac{e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}} (\gamma^L(z) + \gamma^R(z))}{\tilde{\Lambda}_0(z)}}{(-\tilde{\lambda}(z))^{|x|} \tilde{f}(z) \frac{e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}} (\gamma^L(z) + \gamma^R(z))} \tilde{\Lambda}_0(z)} & (x \leq -1). \end{cases} \end{aligned}$$

但し ,

$$\begin{cases} \gamma^L(z) = \alpha \left( 1 - \frac{e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}} \tilde{f}(z) \right) - \beta \frac{e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}} \tilde{f}(z), \\ \gamma^R(z) = \alpha \frac{e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}} \tilde{f}(z) + \beta \left( 1 - \frac{e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}} \tilde{f}(z) \right) \end{cases} \quad (5.27)$$

とおいた . 以下の関係に注意する .

$$\begin{aligned}
\|Res(\tilde{\Xi}_x(z)\varphi : z = e^{i\theta})\|^2 &= \frac{1}{|\tilde{\Lambda}'_0(e^{i\theta})|^2} \times \left| (\tilde{\lambda}(e^{i\theta}))^x \tilde{f}^{(+)}(e^{i\theta}) \frac{e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}} (\gamma^L(e^{i\theta}) - \gamma^R(e^{i\theta})) \right|^2 \\
&= \frac{1}{|\tilde{\Lambda}'_0(e^{i\theta})|^2} \times \left| (\tilde{\lambda}(e^{i\theta}))^{x-1} z - \frac{e^{2\pi i\phi}}{\sqrt{2}} (\gamma^L(e^{i\theta}) - \gamma^R(e^{i\theta})) \right|^2 \\
&= \frac{|\tilde{\lambda}(e^{i\theta})|^{2(x-1)}}{2|\tilde{\Lambda}'_0(e^{i\theta})|^2} |\alpha - \sqrt{2}\alpha e^{2\pi i\phi} \tilde{f}(e^{i\theta}) - \beta|^2 (1 + |\tilde{\lambda}(e^{i\theta})|^2).
\end{aligned}$$

よって、この場合の時間平均極限測度は次のように書ける。

$$\begin{aligned}
\bar{\mu}_\infty(x) &= \sum_{\theta_s} \|Res(\tilde{\Xi}_x(z)\varphi : z = e^{i\theta_s})\|^2 \\
&= \sum_{\theta_s} \frac{|\tilde{\lambda}(e^{i\theta_s})|^{2(x-1)}}{2|\tilde{\Lambda}'_0(e^{i\theta_s})|^2} |\alpha - \sqrt{2}\alpha e^{2\pi i\phi} \tilde{f}(e^{i\theta_s}) - \beta|^2 (1 + |\tilde{\lambda}(e^{i\theta_s})|^2).
\end{aligned}$$

但し、 $\{e^{i\theta_s}\}$  は  $\tilde{\Xi}_x$  の特異点の集合である。

ここで、式 (5.13) より、

$$|\tilde{\lambda}(e^{i\theta})|^2 = 3 - 4\cos^2\theta - 2\sqrt{2}|\sin\theta|\sqrt{1 - 2\cos^2\theta}. \quad (5.28)$$

となる。

式 (5.28) に特異点を代入すると、以下が得られる。

$$|\tilde{\lambda}(e^{i\theta_s})|^2 = \begin{cases} \begin{cases} 3 - 2\sqrt{2}C_+ & (C_+ \geq 1/\sqrt{2}), \\ \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}C_+} & (C_+ < 1/\sqrt{2}), \end{cases} \\ \begin{cases} 3 - 2\sqrt{2}C_- & (C_- \geq 1/\sqrt{2}), \\ \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}C_-} & (C_- < 1/\sqrt{2}). \end{cases} \end{cases}$$

$\phi$  の範囲を  $x = 0$  における  $\phi$  の範囲に合わせて、 $\mu_\infty(x)$  ( $x \geq 1$ ) は

$$\bar{\mu}_\infty(x) = (2 - \sqrt{2}C_+) \left( \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}C_+} \right)^x \bar{\mu}^{(1)}(0) + (2 - \sqrt{2}C_-) \left( \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}C_-} \right)^x \bar{\mu}^{(2)}(0)$$

となる。但し、

$$\begin{aligned}
\bar{\mu}^{(1)}(0) &= \frac{(1 - \sqrt{2}C_+)^2}{(3 - 2\sqrt{2}C_+)^2} |\alpha + i\beta|^2 I_{(0,3/4)}(\phi), \\
\bar{\mu}^{(2)}(0) &= \frac{(1 - \sqrt{2}C_-)^2}{(3 - 2\sqrt{2}C_-)^2} |\alpha - i\beta|^2 I_{(1/4,1)}(\phi).
\end{aligned}$$

3.  $x \leq -1$  の場合 .

2. の場合と全く同様にして  $x \leq -1$  における  $\mu_\infty(x)$  が得られる .

### 5.3.6 定常測度

Wojcik モデルに対して固有値問題

$$U^{(s)}\Psi = \lambda\Psi \quad (\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1) \quad (5.29)$$

を解き , ある種の定常測度を導出した . 但し ,  $U^{(s)}$  は Wojcik モデルに対する  $\infty \times \infty$  のユニタリ行列である . また ,  $\lambda$  は固有値問題 (5.29) の固有値 ,  $\Psi$  は固有ベクトルである . 定常測度を

$$\mu(x) = |\Psi^L(x)|^2 + |\Psi^R(x)|^2 \quad (x \in \mathbb{Z}).$$

で定義する . 但し ,

$$\Psi(x) = \begin{bmatrix} \Psi^L(x) \\ \Psi^R(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

とおいた . はじめに系 2 を得た .

系 2. 固有値問題 (5.29) の解を各場所  $x \in \mathbb{Z}$  ごとに  $\Psi(x) = {}^T[\Psi^L(x), \Psi^R(x)]$  とおき ,  $\alpha = \Psi^L(0)$  ,  $\beta = \Psi^R(0)$  とする . このとき , 固有値問題 (5.29) の解は以下ようになる .

$$\Psi(x) = (-\theta_s \operatorname{sgn}(x))^{|x|} \times \begin{cases} \begin{bmatrix} \alpha \\ (1-\omega)\alpha + \omega\beta \end{bmatrix} & (x \geq 1), \\ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} & (x = 0), \\ \begin{bmatrix} (\omega-1)\beta + \omega\alpha \\ \beta \end{bmatrix} & (x \leq -1). \end{cases} \quad (5.30)$$

但し ,  $\beta^2 = -\alpha^2$  . ここで ,  $\omega = e^{2\pi i\phi}$  ,  $\phi \in (0, 1)$  であることに注意する . また ,  $\alpha$  ,  $\beta$  に応じて以下のように  $\lambda^2$  ,  $\theta_s^2$  が決まる .

1.  $\beta = i\alpha$  の場合 .

$$\lambda^2 = \frac{\omega(1-2\omega+\omega^2) - i\omega(1-\omega+\omega^2)}{1-2\omega+2\omega^2},$$

$$\theta_s^2 = \frac{\omega}{\omega^2 - 3\omega + 1 - i(\omega^2 - 1)} = \frac{1}{2\cos(2\pi\phi) + 2\sin(2\pi\phi) - 3}. \quad (5.31)$$



2.  $\beta = -i\alpha$  の場合.

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= \frac{\omega(1 - 2\omega + \omega^2) + i\omega(1 - \omega + \omega^2)}{1 - 2\omega + 2\omega^2}, \\ \theta_s^2 &= \frac{\omega}{\omega^2 - 3\omega + 1 + i(\omega^2 - 1)} = \frac{1}{2 \cos(2\pi\phi) - 2 \sin(2\pi\phi) - 3}.\end{aligned}\quad (5.32)$$

また, 定常測度が  $\mu(x) = |\Psi^L(x)|^2 + |\Psi^R(x)|^2$  ( $x \in \mathbb{Z}$ ) と定義されることに注意すると, 定理 10 が導かれる.

定理 10. 固有値問題 (5.29) を解いて得られる Wojcik モデルの定常測度は以下のようになる.

$$\mu(x) = |\theta_s|^{2|x|} \times \begin{cases} 2|\alpha|^2 & (x = 0), \\ 2|\alpha|^2\{2 - \cos(2\pi\phi) - \sin(2\pi\phi)\} & (x \neq 0, \beta = i\alpha), \\ 2|\alpha|^2\{2 - \cos(2\pi\phi) + \sin(2\pi\phi)\} & (x \neq 0, \beta = -i\alpha). \end{cases}\quad (5.33)$$

但し,

$$|\theta_s|^2 = \begin{cases} \frac{1}{3 - 2 \cos(2\pi\phi) - 2 \sin(2\pi\phi)} & (\beta = i\alpha), \\ \frac{1}{3 - 2 \cos(2\pi\phi) + 2 \sin(2\pi\phi)} & (\beta = -i\alpha). \end{cases}\quad (5.34)$$

これより Wojcik モデルの局在性は, モデルのパラメータ  $\phi$  と初期状態  $\varphi = {}^T[\alpha, \beta]$  に強く依存する, 即ち, パラメータと初期状態の選び方によって局在化を起こし得ることが定式的に確認できることが分かる. さらに定常測度はウォーカーが遠方に行くに従い指数的に減衰する.

### 5.3.7 系 2 の証明

本節では, 系 2 を分離型母関数法 [25] によって証明する. 固有値問題

$$U^{(s)}\Psi = \lambda^{(\omega)}\Psi \quad (\lambda^{(\omega)} \in \mathbb{C}, |\lambda^{(\omega)}| = 1)\quad (5.35)$$

を解く. 但し,  $U^{(s)}$  は Wojcik モデルに対する  $\infty \times \infty$  のユニタリ行列である. 固有値問題 (5.35) は以下と同値である.

$$\lambda\Psi(x) = P_{x+1}\Psi(x+1) + Q_{x-1}\Psi(x-1).\quad (5.36)$$

但し,

$$P_x = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & (x \neq 0), \\ \frac{\omega}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & (x = 0). \end{cases}, \quad Q_x = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & (x \neq 0), \\ \frac{\omega}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & (x = 0). \end{cases}$$

ここで,  $\omega = e^{2\pi i\phi}$ ,  $\phi \in (0,1)$  であることに注意する. 固有値問題 (5.35) の解を  $\Psi(x) = {}^T[\Psi^L(x), \Psi^R(x)]$  ( $x \in \mathbb{Z}$ ) とおくと, 以下の関係式が成り立つ.

1.  $x = \pm 2, \pm 3, \dots$  の場合.

$$\lambda \Psi^L(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi^L(x+1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi^R(x+1), \quad (5.37)$$

$$\lambda \Psi^R(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi^L(x-1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi^R(x-1). \quad (5.38)$$

2.  $x = 1$  の場合.

$$\lambda \Psi^L(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi^L(2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi^R(2), \quad (5.39)$$

$$\lambda \Psi^R(1) = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \Psi^L(0) - \frac{\omega}{\sqrt{2}} \Psi^R(0). \quad (5.40)$$

3.  $x = -1$  の場合.

$$\lambda \Psi^L(-1) = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \Psi^L(0) + \frac{\omega}{\sqrt{2}} \Psi^R(0), \quad (5.41)$$

$$\lambda \Psi^R(-1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi^L(-2) - \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi^R(-2). \quad (5.42)$$

4.  $x = 0$  の場合.

$$\lambda \Psi^L(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi^L(1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi^R(1), \quad (5.43)$$

$$\lambda \Psi^R(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi^L(-1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi^R(-1). \quad (5.44)$$

ここで,  $\Psi^L(x)$  と  $\Psi^R(x)$  に対する母関数を導入する.  $j \in \{L, R\}$  として,

$$f_+^j(z) = \sum_{x=1}^{\infty} \Psi^j(x) z^x, \quad (5.45)$$

$$f_-^j(z) = \sum_{x=-1}^{-\infty} \Psi^j(x) z^x \quad (5.46)$$

とおく. このとき, 補題 8 が成り立つ.

補題 8.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda - \frac{1}{\sqrt{2}z} & -\frac{1}{\sqrt{2}z} \\ -\frac{\lambda}{\sqrt{2}} & \lambda \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \mathbf{f}_{\pm}(z) = \begin{bmatrix} f_{\pm}^L(z) \\ f_{\pm}^R(z) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a}_+(z) = \begin{bmatrix} -\lambda\alpha \\ \frac{\omega z}{\sqrt{2}}(\alpha - \beta) \end{bmatrix}, \mathbf{a}_-(z) = \begin{bmatrix} \frac{\omega}{\sqrt{2}z}(\alpha + \beta) \\ -\lambda\beta \end{bmatrix}$$

とおく. 但し,  $\omega = e^{2\pi i\phi}$  ( $\phi \in (0, 1)$ ),  $\alpha = \Psi^L(0)$  かつ  $\beta = \Psi^R(0)$ . このとき,

$$A\mathbf{f}_{\pm}(z) = \mathbf{a}_{\pm}(z) \quad (5.47)$$

の関係が成り立つ.

*Proof.* 式 (5.37) と (5.38) より, 以下が成り立つ.

$$\lambda \sum_{x=2}^{\infty} \Psi^L(x) z^x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{x=2}^{\infty} \Psi^L(x+1) z^x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{x=2}^{\infty} \Psi^R(x+1) z^x,$$

$$\lambda \sum_{x=2}^{\infty} \Psi^R(x) z^x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{x=2}^{\infty} \Psi^L(x-1) z^x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{x=2}^{\infty} \Psi^R(x-1) z^x.$$

これら 2 式から,

$$\left( \lambda - \frac{1}{\sqrt{2}z} \right) f_+^L(z) - \frac{1}{\sqrt{2}z} f_+^R(z) = \lambda z \Psi^L(1) - \frac{z}{\sqrt{2}} (\Psi^L(2) + \Psi^R(2))$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi^L(1) + \Psi^R(1)), \quad (5.48)$$

$$\left( \lambda + \frac{z}{\sqrt{2}} \right) f_+^R(z) - \frac{z}{\sqrt{2}} f_+^L(z) = \lambda z \Psi^R(1) \quad (5.49)$$

を得る. 以下, この 2 式の右辺を  $\Psi^L(0)$  と  $\Psi^R(0)$  で表す.  $\alpha = \Psi^L(0)$ ,  $\beta = \Psi^R(0)$  とおく. 式 (5.39) と式 (5.43) を式 (5.48) の右辺に代入すると,

$$\left( \lambda - \frac{1}{\sqrt{2}z} \right) f_+^L(z) - \frac{1}{\sqrt{2}z} f_+^R(z) = -\lambda\alpha \quad (5.50)$$

が導かれる. 一方, 式 (5.40) を式 (5.49) の右辺に代入すると,

$$\left( \lambda + \frac{z}{\sqrt{2}} \right) f_+^R(z) - \frac{z}{\sqrt{2}} f_+^L(z) = \frac{\omega z(\alpha - \beta)}{\sqrt{2}} \quad (5.51)$$

が得られる.

次に，同様にして式 (5.37) と (5.38) から以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}\lambda \sum_{x=-2}^{-\infty} \Psi^L(x) z^x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{x=-2}^{-\infty} \Psi^L(x+1) z^x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{x=-2}^{-\infty} \Psi^R(x+1) z^x, \\ \lambda \sum_{x=-2}^{-\infty} \Psi^R(x) z^x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{x=-2}^{-\infty} \Psi^L(x-1) z^x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{x=-2}^{-\infty} \Psi^R(x-1) z^x.\end{aligned}$$

これら 2 式より，

$$\left(\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}z}\right) f_-^L(z) - \frac{1}{\sqrt{2}z} f_-^R(z) = \frac{\lambda}{z} \Psi^L(-1), \quad (5.52)$$

$$\begin{aligned}\left(\lambda + \frac{z}{\sqrt{2}}\right) f_-^R(z) - \frac{z}{\sqrt{2}} f_-^L(z) &= \frac{\lambda}{z} \Psi^R(-1) - \frac{1}{\sqrt{2}z} (\Psi^L(-2) - \Psi^R(-2)) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi^L(-1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi^R(-1)\end{aligned} \quad (5.53)$$

を得る．式 (5.41) を式 (5.52) の右辺に代入すると，

$$\left(\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}z}\right) f_-^L(z) - \frac{1}{\sqrt{2}z} f_-^R(z) = \frac{\omega(\alpha + \beta)}{\sqrt{2}z} \quad (5.54)$$

が得られる．一方，式 (5.41)，式 (5.42)，式 (5.44) を式 (5.53) の右辺に代入すると，

$$\left(\lambda + \frac{z}{\sqrt{2}}\right) f_-^R(z) - \frac{z}{\sqrt{2}} f_-^L(z) = -\lambda\beta \quad (5.55)$$

が導かれる．以上から，補題 8 の証明が終わる．  $\square$

系 2 の証明に戻る．補題 8 の式 (5.47) を解く． $\theta_s, \theta_l \in \mathbb{C}$  を以下を満たすようにとる．

$$\det A = \frac{\lambda}{\sqrt{2}z} \left\{ z^2 - \sqrt{2} \left( \frac{1}{\lambda} - \lambda \right) z - 1 \right\} \quad (5.56)$$

$$= \frac{\lambda}{\sqrt{2}z} (z - \theta_l)(z - \theta_s). \quad (5.57)$$

但し， $|\theta_s| \leq 1 \leq |\theta_l|$ ．

式 (5.56) に注意すると， $\theta_s \theta_l = -1$  である．次に，補題 8 を用いて固有値問題の固有ベクトル  $\Psi$  を各場所  $x \in \mathbb{Z}$  ごとに求めてる．

1.  $f_+^L(z)$  について．

$$\begin{aligned}f_+^L(z) &= \frac{1}{\det A} \left\{ \left( \lambda + \frac{z}{\sqrt{2}} \right) (-\lambda\alpha) + \frac{1}{\sqrt{2}z} \frac{\omega z}{\sqrt{2}} (\alpha - \beta) \right\} \\ &= \frac{-\alpha z}{\lambda(z - \theta_s)(z - \theta_l)} \left\{ z - \frac{\sqrt{2}}{\lambda\alpha} \left( -\lambda^2\alpha + \frac{\omega}{2}(\alpha - \beta) \right) \right\}.\end{aligned}$$

ここで,  $\theta_s = \frac{\sqrt{2}}{\lambda\alpha} \left( -\lambda^2\alpha + \frac{\omega}{2}(\alpha - \beta) \right)$  とおくと,

$$\begin{aligned} f_+^L(z) &= -\frac{\alpha z}{z - \theta_l} = -\frac{\alpha z}{z + \theta_s^{-1}} = -\alpha \frac{z\theta_s}{z\theta_s + 1} \\ &= -\alpha\theta_s z \{1 + (-\theta_s z) + (-\theta_s z)^2 + \cdots\} . \\ &= \alpha \sum_{x=1}^{\infty} (-\theta_s z)^x \end{aligned}$$

が導かれる．即ち,

$$f_+^L(z) = \sum_{x=1}^{\infty} (-\theta_s z)^x \quad (5.58)$$

を得る．従って, 式 (5.58) と  $f_+^L(z)$  の定義より,

$$\Psi^L(x) = \alpha(-\theta_s)^x \quad (x \geq 1) \quad (5.59)$$

が得られる．但し,

$$\theta_s = \frac{\sqrt{2}}{\lambda\alpha} \left( -\lambda^2\alpha + \frac{\omega}{2}(\alpha - \beta) \right) . \quad (5.60)$$

2.  $f_+^R(z)$  について．

同様に,  $\theta_s = \frac{\omega(\alpha - \beta)}{\sqrt{2}\lambda\{(\omega - 1)\alpha - \omega\beta\}}$  とおくと,

$$\begin{aligned} f_+^R(z) &= -\frac{\{(1 - \omega)\alpha + \omega\beta\}z}{z - \theta_l} = -\frac{\{(1 - \omega)\alpha + \omega\beta\}z}{z + \theta_s^{-1}} = -\frac{\{(1 - \omega)\alpha + \omega\beta\}\theta_s z}{1 + \theta_s z} \\ &= -\{(1 - \omega)\alpha + \omega\beta\}\theta_s z \{1 + (-\theta_s z) + (-\theta_s z)^2 + \cdots\} \end{aligned}$$

が導かれる．即ち,

$$f_+^R(z) = \{(1 - \omega)\alpha + \omega\beta\} \sum_{x=1}^{\infty} (-\theta_s z)^x \quad (5.61)$$

を得る．従って

$$\Psi^R(x) = \{(1 - \omega)\alpha + \omega\beta\}(-\theta_s)^x \quad (x \geq 1) \quad (5.62)$$

が得られる．但し,

$$\theta_s = \frac{\omega(\alpha - \beta)}{\sqrt{2}\lambda\{(\omega - 1)\alpha - \omega\beta\}} . \quad (5.63)$$

3.  $f_-^L(z)$  について .

同様に,  $\theta_l = -\frac{\sqrt{2}\lambda\{\omega\alpha + (\omega - 1)\beta\}}{\omega(\alpha + \beta)}$  とおくと ,

$$\begin{aligned} f_-^L(z) &= \frac{\omega(\alpha + \beta)}{\sqrt{2}\lambda} \frac{1}{z - \theta_s} \\ &= \frac{\omega(\alpha + \beta)}{\sqrt{2}\lambda} \times \frac{1}{\theta_s} \times \frac{\theta_s}{z} \frac{1}{1 - \theta_s/z} \\ &= \frac{\omega(\alpha + \beta)}{\sqrt{2}\lambda} \frac{1}{\theta_s} \sum_{x=-1}^{-\infty} (\theta_s^{-1}z)^x \\ &= \{\omega\alpha + (\omega - 1)\beta\} \sum_{x=-1}^{-\infty} (\theta_s^{-1}z)^x \end{aligned}$$

が導かれる . 即ち ,

$$f_-^L(z) = \{\omega\alpha + (\omega - 1)\beta\} \sum_{x=-1}^{-\infty} (\theta_s^{-1}z)^x \quad (5.64)$$

を得る . 従って ,

$$\Psi^L(x) = \{\omega\alpha + (\omega - 1)\beta\}(\theta_s)^{-x} \quad (x \leq -1) \quad (5.65)$$

が得られる . 但し ,

$$\theta_s = \frac{\omega(\alpha + \beta)}{\sqrt{2}\lambda\{\omega\alpha + (\omega - 1)\beta\}}. \quad (5.66)$$

4.  $f_-^R(z)$  について .

同様に,  $\theta_l = \frac{\lambda\beta}{\sqrt{2}} \frac{2}{-\omega\alpha + (2\lambda^2 - \omega)\beta}$  とおくと ,

$$\begin{aligned} f_-^R(z) &= \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \left\{ \frac{\omega}{2}\alpha + \left( \frac{\omega}{2} - \lambda^2 \right) \beta \right\} \frac{1}{z - \theta_s} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \left\{ \frac{\omega}{2}\alpha + \left( \frac{\omega}{2} - \lambda^2 \right) \beta \right\} \frac{1}{\theta_s} \frac{\theta_s}{z} \frac{1}{1 - \theta_s/z} \\ &= \beta \sum_{x=-1}^{-\infty} (\theta_s^{-1}z)^x \end{aligned}$$

が導かれる . 即ち ,

$$f_-^R(z) = \beta \sum_{x=-1}^{-\infty} (\theta_s^{-1}z)^x \quad (5.67)$$

を得る．従って，

$$\Psi^R(x) = \beta(\theta_s)^{-x} \quad (x \leq -1) \quad (5.68)$$

が得られる．但し，

$$\theta_s = -\frac{\sqrt{2}}{\lambda\beta} \left\{ \frac{\omega}{2}\alpha + \left( \frac{\omega}{2} - \lambda^2 \right) \beta \right\}. \quad (5.69)$$

以上，より系 2 が得られる．本論文では定常測度が  $\mu(x) = |\Psi^L(x)|^2 + |\Psi^R(x)|^2$  ( $x \in \mathbb{Z}$ ) で定義されることに注意すると，系 2 から定理 10 が導かれる．

## 5.4 研究考察

固有値問題 (5.29) の解は Wojcik et. al.[47] と矛盾しない結果であり，導出はよりシステムティックで平易である．

### 5.4.1 先行研究との対応

先行研究 Wojcik et al. [47] との対応についてまとめる．以下では， $\lambda^2$  と  $\theta_s^2$  を  $\omega$  を用いて表す．まず， $\theta_s$  を表す四つの式 (5.60), (5.63), (5.66), (5.69) より， $\beta = i\alpha$ ，または  $\beta = -i\alpha$ ，および，

$$(-\lambda^2\omega + \lambda^2 - \omega)\alpha + (-\omega^2 + \omega + \lambda^2\omega)\beta = 0. \quad (5.70)$$

を得る．これを  $\lambda^2$  についてまとめると，

$$(\alpha - \alpha\omega + \beta\omega)\lambda^2 = \alpha\omega + \beta\omega^2 - \beta\omega \quad (5.71)$$

となる．さらに，式 (5.66) より，

$$\theta_s^2 = \frac{\omega^2(\alpha + \beta)^2}{2\lambda^2\{\omega\alpha + (\omega - 1)\beta\}^2} \quad (5.72)$$

を得る．これより，以下の場合に分けて考える．

1.  $\beta = i\alpha$  の場合．

Wojcik et al.[47] との対応は，

$$\bar{\alpha}_0^{(-)} = C, \bar{\beta}_0^{(-)} = iC \quad (5.73)$$

となる．式 (5.72) を  $\lambda^2$  について解いて，

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \frac{\omega(1 - i + i\omega)}{1 - \omega + i\omega} \\ &= \frac{\omega(1 - 2\omega + \omega^2) - i\omega(1 - \omega + \omega^2)}{1 - 2\omega + 2\omega^2} \end{aligned} \quad (5.74)$$

を得る．式 (5.74) は Wojcik *et al.*[47] の式 (8) の  $\lambda_-$  と一致することが分かる．また，このとき，

$$\theta_s^2 = \frac{\omega}{\omega^2 - 3\omega + 1 - i(\omega^2 - 1)} \quad (5.75)$$

であり，これは Wojcik *et al.* [47] の  $x_-$  を表す式 (11) と一致することが分かる．

2.  $\beta = -i\alpha$  の場合．

1. と同様にして，

$$\lambda^2 = \frac{\omega(1 - 2\omega + \omega^2) + i\omega(1 - \omega + \omega^2)}{1 - 2\omega + 2\omega^2} \quad (5.76)$$

が得られる．式 (5.74) も Wojcik *et al.* [47] の式 (8) の  $\lambda_+$  と一致する．また，

$$\theta_s^2 = \frac{\omega}{\omega^2 - 3\omega + 1 + i(\omega^2 - 1)} \quad (5.77)$$

であり，これは Wojcik *et al.*[47] の  $x_+$  を表す式 (11) と一致する．

#### 5.4.2 CGMV 法による結果との整合性

Cantero *et al.* [4] によれば，CGMV 法を用いて 1 次元上の原点のみユニタリ行列が異なる 2 状態の量子ウォークの時間平均極限測度が得られる．CGMV 法とは，Cantero, Grümbaum, Moral, and Velázquez (2010) によって導入された直交多項式の理論を用いた量子ウォークの解析方法であり，彼らの頭文字をとってその名前としている．CGMV 法は，量子ウォーカーの挙動が空間に依存する非一様量子ウォークの解析にも役に立つ．特に，1 次元上の原点のみユニタリ行列が異なる量子ウォークの再帰確率を与える．以下，参考文献 [4] の記法を用いる．Wojcik モデルに対して CGMV 法を適用すると，

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 0, \quad \sigma_2 = \pi, \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \pi, \quad \theta = \frac{\sigma}{2} = \frac{\pi}{2}, \\ \tau_1 &= 2\pi\phi, \quad \tau_2 = 2\pi\phi + \pi, \quad \tau = \tau_1 + \tau_2 = 4\pi\phi + \pi, \\ a &= \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-2\pi\phi i}, \quad b = \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad \omega = e^{2\pi\phi i}, \\ \zeta_{\pm}(b) &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad \rho_a = \rho_b = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

となる．よって，

$$\left| a - \frac{1}{2}\zeta_+(b) \right| > \frac{1}{2}$$



は,  $\phi \in (1/4, 1)$  と同値である. 同様に,

$$\left| a - \frac{1}{2}\zeta_-(b) \right| > \frac{1}{2}$$

は,  $\phi \in (0, 3/4)$  と同値である. さらに,

$$|\zeta_{\pm}(b) - a|^2 = \frac{3 - 2\sqrt{2}C_{\pm}}{2}$$

が成り立つ. 一方,

$$\hat{\alpha} = \hat{\lambda}_0^{(1)}\alpha = \alpha, \quad \hat{\beta} = \hat{\lambda}_1^{(2)}\beta = \exp\left(i\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} + \tau_2 - \sigma_2\right)\right)\beta = i\omega\beta$$

が成り立つ. 従って,  $\phi \in (1/4, 1)$  のとき,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} r_{2n}(0) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho_a^2}{|\zeta_+(b) - a|^2}\right)^2 \left\{1 - \frac{(|\hat{\alpha}|^2 - |\hat{\beta}|^2)\Re(b) + 2\rho_b\Re(\overline{\omega\hat{\alpha}\hat{\beta}})}{\sqrt{1 - (\Im(b))^2}}\right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2(1 - \sqrt{2}C_-)}{3 - 2\sqrt{2}C_-}\right)^2 \{1 - 2\Re(i\bar{\alpha}\beta)\} \\ &= 2 \left(\frac{1 - \sqrt{2}C_-}{3 - 2\sqrt{2}C_-}\right)^2 |\alpha - i\beta|^2 \end{aligned}$$

となる. 同様に,  $\phi \in (0, 3/4)$  のとき,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} r_{2n}(0) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho_a^2}{|\zeta_-(b) - a|^2}\right)^2 \left\{1 + \frac{(|\hat{\alpha}|^2 - |\hat{\beta}|^2)\Re(b) + 2\rho_b\Re(\overline{\omega\hat{\alpha}\hat{\beta}})}{\sqrt{1 - (\Im(b))^2}}\right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2(1 - \sqrt{2}C_+)}{3 - 2\sqrt{2}C_+}\right)^2 \{1 + 2\Re(i\bar{\alpha}\beta)\} \\ &= 2 \left(\frac{1 - \sqrt{2}C_+}{3 - 2\sqrt{2}C_+}\right)^2 |\alpha + i\beta|^2 \end{aligned}$$

となる. 従って,

$$\bar{\mu}_{\infty}(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{r_{2n}(0)}{2} = \left(\frac{1 - \sqrt{2}C_-}{3 - 2\sqrt{2}C_-}\right)^2 |\alpha - i\beta|^2 \times I_{(1/4, 1)}(\phi) + \left(\frac{1 - \sqrt{2}C_+}{3 - 2\sqrt{2}C_+}\right)^2 |\alpha + i\beta|^2 \times I_{(0, 3/4)}(\phi).$$

これより, CGMV 法により時間平均極限測度を導出した場合も時空間母関数法による結果と同じ結果が得られることが確かめられる.

### 5.4.3 時間平均極限測度と定常測度の対応

Wojcik モデルでは, 時間平均極限測度が定常測度を完全に含む形をしている. 本来2つの測度は異なるものであり, このような綺麗な対応関係は珍しい. Wojcik モデルは, 分離型母関数法を適用できる良い量子ウォークである, と考えられる.

## 5.5 本章のまとめと今後の展望

本章の研究では、

- Wojcik *et al.* [47] により導入され研究された量子ウォークに対して、2種類の母関数法を用いて時間平均極限測度と定常測度を導出した。
- 時間平均極限測度は定常測度を含む形をしており、定常測度は時間平均極限測度の特殊な場合であることが分かった。
- 時間平均極限測度と定常測度は、共に原点对称性を持ち、定常測度は場所に関して指数的に減少することが分かった。
- 局在化は、初期状態とモデルのパラメータに強く依存することが分かった。
- 原点における時間平均極限測度はCGMV法[4]、およびパスの方法、そして時空間母関数法の3つの方法で得た結果と一致した。このことから、時空間母関数法がWojcikモデルに対して有効であることが期待される。

今後は、

- 弱収束極限測度の拡散項を時空間母関数法を用いて導出しWojcikモデルの漸近挙動の特性を明らかにする。
- Wojcikモデルの時間平均極限測度と定常測度の関係の定性的な意味を明らかにし、量子統計物理学や量子情報学との関連を模索する。

## 第6章 二相系量子ウォークの 極限定理

本章の研究では，原点に関して非対称な1次元離散時間量子ウォークを扱う．ここで「非対称」とは，原点に関して正と負の領域で異なる量子コインを持つことをいう．このようなモデルを本論文では「二相系量子ウォーク」と呼ぶことにする．具体的には，はじめにパスの重みの母関数を用いて時間平均極限測度を導出した．尚，量子ウォークの局在化は数学的には時間平均極限測度によって定義される．Konno *et al.* [25] によれば，1次元系におけるいくつかの量子ウォークでは時間平均極限測度と定常測度は密接に関係している．そこで，二相系量子ウォークの固有方程式をその解の母関数を用いて解き，定常測度を導出し2つの測度の関係を調べた．また，1次元系における2状態の空間的に一様な量子ウォークは局在化を起こさないことが知られている [21, 22]．本章ではまず，本章の研究背景と研究目的を紹介し，続いて二相系量子ウォークの極限定理について研究した内容 [8] をまとめる．本章の研究は，二相系量子ウォークのパラメータの値により一致する別の量子ウォークに関する研究 [7] も参考にした．

### 6.1 研究背景と研究目的

第4章でまとめたように，1次元系においてこれまで局在化を表す厳密な結果が得られているのは，場所に関して一様な量子ウォーク [21, 22]，原点のみユニタリ行列が異なる量子ウォーク [25]，3状態グローヴァーウォーク [15] のみであり，原点に関して非対称な量子ウォークに対しては局在化に関する厳密な研究結果が存在しなかった．

このような背景から，原点のみユニタリ行列が異なる量子ウォークの自然な非対称化モデルの1つとして，原点に関して正と負の領域で量子ウォーカーが異なる挙動をする（異なる量子コインを持つ）場所に関して非一様な量子ウォークが考えられる．この量子ウォークを「二相系量子ウォーク」と呼び，その時間平均極限測度と定常測度を導出し局在化を記述する厳密な表式を得ること，および2つの測度の関係を明らかにし原点に関して非対称な場所に関して非一様な量子ウォークの漸近挙動の解析方法の改善，構築につなげることの2点を目的とした．また，Kitagawa *et al.* [18] は，トポロジカル絶縁体の研究に対して二相系量子ウォークが重要な示唆を与えることを明らかにしており，2相系量子ウォークの量子統計物理学への応用も期待される．

## 6.2 研究内容

### 6.2.1 モデル

本章の研究では, 各場所  $x \in \mathbb{Z}$  に対して時間発展作用素が以下のユニタリ行列で与えられる量子ウォークを扱う.

$$U_x = \begin{cases} U_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & e^{i\sigma_+} \\ e^{-i\sigma_+} & -1 \end{bmatrix} & (x \geq 1), \\ U_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & e^{i\sigma_-} \\ e^{-i\sigma_-} & -1 \end{bmatrix} & (x \leq -1), \\ U_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & (x = 0). \end{cases} \quad (6.1)$$

但し,  $\sigma_+, \sigma_- \in [0, 2\pi)$  であり, 添え字の  $x$  は量子ウォーカーの位置を表す. 本論文では, この量子ウォークを特に「二相系量子ウォーク」と呼ぶ.  $\det(U_x) = -1$  ( $x \in \mathbb{Z}$ ) であることに注意する.

### 6.2.2 時間発展

二相系量子ウォークのユニタリ行列  $U_x$  を以下のように分解する.

$$U_x = P_x + Q_x \quad (x \in \mathbb{Z}).$$

但し,

$$P_x = \begin{cases} P_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & e^{i\sigma_+} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & (x \geq 1), \\ P_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & e^{i\sigma_-} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & (x \leq -1), \\ P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & (x = 0). \end{cases} \quad Q_x = \begin{cases} Q_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e^{-i\sigma_+} & -1 \end{bmatrix} & (x \geq 1), \\ Q_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e^{-i\sigma_-} & -1 \end{bmatrix} & (x \leq -1), \\ Q_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & (x = 0). \end{cases}$$

ここで, 時刻  $t$  場所  $x$  における量子ウォーカーの確率振幅を

$$\Psi_t(x) = \begin{bmatrix} \Psi_t^L(x) \\ \Psi_t^R(x) \end{bmatrix}$$

とおく．このとき，二相系量子ウォークの時間発展は以下の漸化式で定義される．

$$\Psi_{t+1}(x) = P_{x+1}\Psi_t(x+1) + Q_{x-1}\Psi_t(x-1), \quad (6.2)$$

即ち，

$$\begin{bmatrix} \Psi_{t+1}^L(x) \\ \Psi_{t+1}^R(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{x+1}\Psi_t^L(x+1) + b_{x+1}\Psi_t^R(x+1) \\ c_{x-1}\Psi_t^L(x-1) + d_{x-1}\Psi_t^R(x-1) \end{bmatrix}.$$

また，量子ウォーカーが時刻  $t$  のときに場所  $x$  にいる確率を

$$P(X_t = x) = \|\Psi_t(x)\|^2 = \langle \Psi_t(x) | \Psi_t(x) \rangle$$

で定義する．時刻 0 における量子ウォーカーの原点における確率振幅を

$$|\Psi_0(0)\rangle = T[\alpha, \beta]$$

とする．但し， $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  あり， $T$  は転置作用素を表す．

## 6.3 研究結果

### 6.3.1 時間平均極限測度

第 2 章でまとめたように 1 次元離散時間量子ウォークの局在化は数学的には時間平均極限測度を用いて定義された．本章の研究では第 5 章の「Wojcik モデルの極限定理」の研究と同様に時間平均極限測度，および定常測度を定義する．即ち，時間平均極限測度を

$$\bar{\mu}_\infty(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{\mu}_T(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} P(X_t = x),$$

定常測度を

$$\mu(x) = |\Psi^L(x)|^2 + |\Psi^R(x)|^2 \quad (x \in \mathbb{Z})$$

と定義する．但し， $\Psi(x) = T[\Psi^L(x)\Psi^R(x)]$  は，固有値問題  $U^{(s)}\Psi = \lambda\Psi$  の解である．原点から出発する二相系量子ウォークに対して，はじめに以下の定理 11 を得た．

**定理 11.** 初期量子コイン状態を  $\varphi = T[\alpha, \beta]$  とおく．但し， $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ， $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ ． $\alpha = ae^{i\phi_1}$ ， $\beta = be^{i\phi_2}$ ， $\phi_j \in [0, 2\pi)$  ( $j = 1, 2$ )．さらに  $\sigma = (\sigma_+ - \sigma_-)/2$ ， $\tilde{\phi}_{ij} = \phi_i - \phi_j$  ( $i, j = 1, 2$ ) とおく．このとき，各場所  $x \in \mathbb{Z}$  に関する時間平均極限測度は以下ようになる．

$$\bar{\mu}_\infty(x) = I_{\{-1/\sqrt{2} \leq \sin \sigma \leq 1\}}(x)\nu^{(+)}(x; \sigma) + I_{\{-1 \leq \sin \sigma \leq 1/\sqrt{2}\}}(x)\nu^{(-)}(x; \sigma).$$

但し,

$$\nu^{(\pm)}(x; \sigma) = \left( \frac{1 \pm \sqrt{2} \sin \sigma}{3 \pm 2\sqrt{2} \sin \sigma} \right)^2 \times \{1 \pm 2ab \sin(\tilde{\phi}_{12} - \tilde{\sigma})\} \left\{ \delta_0(x) + (1 - \delta_0(x))(2 \pm \sqrt{2} \sin \sigma) \left( \frac{1}{3 \pm 2\sqrt{2} \sin \sigma} \right)^{|x|} \right\}.$$

これより, 二相系量子ウォークの時間平均極限測度は原点对称性を持つことが分かる. また, 二相系量子ウォークは初期状態  $\varphi$  やパラメータ  $\phi$  に依らずに局在化を起こす.

### 6.3.2 定理 11 の証明

ここでは, 定理 11 を時空間母関数法により証明する.

□ 準備

まず, 導出に必要な用語や補題などを準備する. 基本的な用語は第 5 章の「Wojcik モデルの極限定理」の研究と同様である. 証明では第 5 章の系 1 を主軸に,  $\tilde{\Xi}_x(z)$  の留数を求めることに帰着される. そこで,  $\tilde{\Xi}_x(z)$  の便利な表現を紹介する. 補題 9 は参考文献 [25] における Lemma 3.1 から得られる.

補題 9. [25]  $\Delta_x : U_x$  の行列式とする. また,  $x \in \mathbb{Z}$  に対して,  $a_x, d_x \neq 0$  が成り立つとする.

1.  $x = 0$  の場合:

$$\tilde{\Xi}_0(z) = \frac{1}{1 + \tilde{f}_0^{(+)}(z)\tilde{f}_0^{(-)}(z)} \begin{bmatrix} 1 & -\tilde{f}_0^{(+)}(z) \\ \tilde{f}_0^{(-)}(z) & 1 \end{bmatrix}.$$

2.  $|x| \geq 1$  の場合.

$$\tilde{\Xi}_x(z) = \begin{cases} (\tilde{\lambda}_x^{(+)}(z))^{x-1} \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_x^{(+)}(z)\tilde{f}_x^{(+)}(z) \\ z \end{bmatrix} [0, -1]\tilde{\Xi}_0(z) & (x \geq 1), \\ (\tilde{\lambda}_x^{(-)}(z))^{|x|-1} \begin{bmatrix} z \\ \tilde{\lambda}_x^{(-)}(z)\tilde{f}_x^{(-)}(z) \end{bmatrix} [1, 0]\tilde{\Xi}_0(z) & (x \leq -1). \end{cases}$$

但し,  $\tilde{f}_x^{(+)}(z)$  は以下の 2 次方程式の解である.

$$1. (\tilde{f}_x^{(+)}(z))^2 - \sqrt{2}e^{i\sigma_+}(1+z^2)\tilde{f}_x^{(+)}(z) + e^{2i\sigma_+}z^2 = 0,$$

$$2. (\tilde{f}_x^{(-)}(z))^2 - \sqrt{2}e^{-i\sigma}(1+z^2)\tilde{f}_x^{(-)}(z) + e^{-2i\sigma}z^2 = 0.$$

また,  $\tilde{\lambda}_x^{(\pm)}(z)$  は以下を満たす.

$$\tilde{\lambda}_x^{(+)}(z) = \frac{z}{e^{-i\sigma_+}\tilde{f}_x^{(+)}(z) - \sqrt{2}}, \quad \tilde{\lambda}_x^{(-)}(z) = \frac{z}{\sqrt{2} - e^{i\sigma_-}\tilde{f}_x^{(-)}(z)}.$$

ここで,  $x \in \mathbb{Z}$  に対して,

$$\tilde{\lambda}_x^{(\pm)}(z) = \tilde{\lambda}_0^{(\pm)}(z), \quad \tilde{\lambda}^{(+)}(z) = -\tilde{\lambda}^{(-)}(z), \quad \tilde{f}_x^{(\pm)}(z) = \tilde{f}_0^{(\pm)}(z)$$

となることに注意し, それぞれ  $\tilde{\lambda}^{(\pm)}(z)$ ,  $\tilde{f}^{(\pm)}(z)$  とおく.  $\omega = iz = ie^{i\theta}$  とおくと, 以下のように  $\tilde{\lambda}^{(\pm)}(z)$  と  $\tilde{f}^{(\pm)}(z)$  が得られる.

$$\begin{cases} \tilde{f}^{(\pm)}(z) = -\frac{\omega e^{\pm i\sigma_{\pm}}}{\omega\sqrt{2}}\{(\omega - \omega^{-1}) + \sqrt{(\omega - \omega^{-1})^2 + 2}\}, \\ \tilde{\lambda}^{(\pm)}(\omega) = \mp \frac{\omega}{\sqrt{2}}\{(\omega - \omega^{-1}) + \sqrt{(\omega - \omega^{-1})^2 + 2}\}. \end{cases}$$

を得る. ここで,  $\omega = iz = ie^{i\theta}$  に注意すると, 第5章の「Wojcik モデルの極限定理」の研究と同様に根号は以下ようになる.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sqrt{(\omega + \omega^{-1})^2 - 2} = \begin{cases} -2 \operatorname{sgn}(\sin \theta) \sqrt{\sin^2 \theta - 1/2} & (|\sin \theta| \geq 1/\sqrt{2}), \\ -2i \operatorname{sgn}(\cos \theta) \sqrt{\sin^2 \theta - 1/2} & (|\sin \theta| < 1/\sqrt{2}). \end{cases}$$

従って,

$$\tilde{f}^{(+)}(z) = e^{i(\theta + \sigma_+ + \tilde{\phi}(\theta))} \quad (6.3)$$

を得る. 同様にして,  $\tilde{f}^{(-)}(z)$  は以下ようになる.

$$\tilde{f}^{(-)}(z) = e^{i(\theta - \sigma_- + \tilde{\phi}(\theta))}. \quad (6.4)$$

また,

$$\tilde{\lambda}^{(\pm)}(z) = \pm i \{-\sqrt{2} \sin \theta + \operatorname{sgn}(\sin \theta) \sqrt{1 - 2 \cos^2 \theta}\} \quad (6.5)$$

となる.

□  $\tilde{\Xi}_x(z)$  の特異点

補題9の  $\tilde{\Xi}_0(z)$  の分母を  $\tilde{\Lambda}_0(z) = 1 + \tilde{f}^{(+)}(z)\tilde{f}^{(-)}(z)$  とおく.  $\tilde{\Xi}_x(z)$  の特異点は,  $\tilde{\Lambda}_0(z) = 0$  を満たす点  $z \in \mathbb{C}$  であるが, これは

$$e^{i(\theta + \tilde{\phi}(\theta))} = \pm i e^{-i\sigma}$$

と同値である. 但し,  $\sigma = (\sigma_+ - \sigma_-)/2$  とおいた.

1.  $e^{i(\theta+\tilde{\phi}(\theta))} = ie^{-i\sigma}$  の場合.

以下が成り立つ .

$$\sin(\theta + \tilde{\phi}(\theta)) = \cos \sigma, \quad (6.6)$$

$$\cos(\theta + \tilde{\phi}(\theta)) = \sin \sigma. \quad (6.7)$$

式 (6.6) と式 (6.7) はそれぞれ次のように展開される .

$$\begin{aligned} \sin \theta \cos \tilde{\phi}(\theta) + \sin \tilde{\phi}(\theta) \cos \theta &= \sqrt{2} \sin \theta \cos \theta + \operatorname{sgn}(\sin \theta) \cos \theta \sqrt{1 - 2 \cos^2 \theta} \\ &= \cos \sigma, \\ \cos \theta \cos \tilde{\phi}(\theta) - \sin \theta \sin \tilde{\phi}(\theta) &= \sqrt{2} \cos^2 \theta - |\sin \theta| \sqrt{1 - 2 \cos^2 \theta} \\ &= \sin \sigma. \end{aligned}$$

これより ,

$$(\sqrt{2} - \sin \sigma) \cos \theta = \sin \theta \cos \sigma, \quad (6.8)$$

即ち ,

$$\cos \theta = \frac{\sin \theta \cos \sigma}{\sqrt{2} - \sin \sigma} \quad (6.9)$$

が得られ ,  $\sin^2 \tilde{\phi}(\theta) + \cos^2 \tilde{\phi}(\theta) = 1$  に注意すると特異点は以下を満たす .

$$\begin{cases} \cos^2 \theta = \frac{\cos^2 \sigma}{3 - 2\sqrt{2} \sin \sigma}, \\ \sin^2 \theta = \frac{(\sqrt{2} - \sin \sigma)^2}{3 - 2\sqrt{2} \sin \sigma}. \end{cases} \quad (6.10)$$

式 (6.9) より解の符号は  $\cos \sigma$  の符号で決まる .

2.  $e^{i(\theta+\tilde{\phi}(\theta))} = -ie^{-i\sigma}$  の場合 .

以下が成り立つ .

$$\sin(\theta + \tilde{\phi}(\theta)) = -\cos \sigma,$$

$$\cos(\theta + \tilde{\phi}(\theta)) = -\sin \sigma.$$

1. と同様にして ,

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \sin \theta \cos \theta + \operatorname{sgn}(\sin \theta) \cos \theta \sqrt{1 - 2 \cos^2 \theta} &= -\cos \sigma, \\ \sqrt{2} \cos^2 \theta - |\sin \theta| \sqrt{1 - 2 \cos^2 \theta} &= -\sin \sigma \end{aligned}$$



を得る．これより，

$$(\sqrt{2} + \sin \sigma) \cos \theta = -\sin \theta \cos \sigma,$$

即ち，

$$\cos \theta = -\frac{\sin \theta \cos \sigma}{\sqrt{2} + \sin \sigma} \quad (6.11)$$

が得られ， $\sin^2 \tilde{\phi}(\theta) + \cos^2 \tilde{\phi}(\theta) = 1$  に注意すると特異点は以下を満たす．

$$\begin{cases} \cos^2 \theta = \frac{\cos^2 \sigma}{3 + 2\sqrt{2} \sin \sigma}, \\ \sin^2 \theta = \frac{(\sqrt{2} + \sin \sigma)^2}{3 + 2\sqrt{2} \sin \sigma}. \end{cases} \quad (6.12)$$

式 (6.11) より解の符号は  $\cos \sigma$  の符号で決まる．

#### □ 時間平均極限測度の構成

各場所  $x (\in \mathbb{Z})$  ごとに時間平均極限測度を求める．

1.  $x = 0$  の場合．

補題 9 より， $\tilde{\Xi}_0(z)\varphi$  は以下のように書ける．

$$\tilde{\Xi}_0(z)\varphi = \frac{1}{1 + \tilde{f}^{(+)}(z)\tilde{f}^{(-)}(z)} \begin{bmatrix} 1 & -\tilde{f}^{(+)}(z) \\ \tilde{f}^{(-)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha - \beta \tilde{f}^{(+)}(z)}{\tilde{\Lambda}_0} \\ \frac{\alpha \tilde{f}^{(-)}(z) + \beta}{\tilde{\Lambda}_0} \end{bmatrix}.$$

ここで， $\|Res(\tilde{\Xi}_0(z)\varphi : e^{i\theta})\|^2$  を次で定義する．

$$\|Res(\tilde{\Xi}_0(z)\varphi : e^{i\theta})\|^2 = \left| Res \left( \frac{\alpha - \beta \tilde{f}^{(+)}(z)}{\tilde{\Lambda}_0(z)} : z = e^{i\theta} \right) \right|^2 + \left| Res \left( \frac{\alpha \tilde{f}^{(-)}(z) + \beta}{\tilde{\Lambda}_0(z)} : z = e^{i\theta} \right) \right|^2.$$

$$Res \left( \frac{\alpha \tilde{f}^{(-)}(z) + \beta}{\tilde{\Lambda}_0(z)} : z = e^{i\theta} \right) = \frac{1}{\tilde{\Lambda}'_0(e^{i\theta})} (\alpha - \beta \tilde{f}^{(+)}(e^{i\theta}))$$

の関係に注意すると，

$$\begin{aligned} \left| Res \left( \frac{\alpha - \beta \tilde{f}^{(+)}(z)}{\tilde{\Lambda}_0(z)} : z = e^{i\theta} \right) \right|^2 &= \frac{1}{|\tilde{\Lambda}'_0(e^{i\theta})|^2} |\alpha - \beta \tilde{f}^{(+)}(e^{i\theta})|^2 \\ &= \frac{1}{|\tilde{\Lambda}'_0(e^{i\theta})|^2} \{1 - 2\Re(\bar{\alpha}\beta \tilde{f}^{(+)}(e^{i\theta}))\} \end{aligned}$$

となる．同様にして，

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{Res} \left( \frac{\alpha \tilde{f}^{(-)}(z) + \beta}{\tilde{\Lambda}_0(z)} : z = e^{i\theta} \right) \right|^2 &= \frac{1}{|\tilde{\Lambda}'_0(e^{i\theta})|^2} |\alpha \tilde{f}^{(-)}(e^{i\theta}) + \beta|^2 \\ &= \frac{1}{|\tilde{\Lambda}'_0(e^{i\theta})|^2} \{1 + 2\Re(\alpha \bar{\beta} \tilde{f}^{(-)}(e^{i\theta}))\} \end{aligned}$$

となる．従って， $\bar{\mu}_\infty(0)$  は

$$\bar{\mu}_\infty(0) = \sum_{\theta_s} \frac{2}{|\tilde{\Lambda}'_0(e^{i\theta})|^2} \{1 - \Re(\bar{\alpha} \beta \tilde{f}^{(+)}(e^{i\theta})) + \Re(\alpha \bar{\beta} \tilde{f}^{(-)}(e^{i\theta}))\} \quad (6.13)$$

と表される．各特異点  $e^{i\theta_s}$  に対して式 (6.13) を計算する． $\alpha = ae^{i\phi_1}$ ， $\beta = be^{i\phi_2}$ ， $\tilde{\phi}_{ij} = \phi_i - \phi_j$  ( $j = 1, 2$ ) とおくと，

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} \beta \tilde{f}^{(+)}(z) &= ab \cos(\tilde{\phi}_{21} + \theta + \sigma_+ + \tilde{\phi}(\theta)) , \\ \alpha \bar{\beta} \tilde{f}^{(-)}(z) &= ab \cos(\tilde{\phi}_{21} - \theta + \sigma_- + \tilde{\phi}(\theta)) \end{aligned}$$

となる．以下の関係に注意する．

$$\begin{cases} \cos(\tilde{\phi}_{21} + \theta + \sigma_+ + \tilde{\phi}(\theta)) = \cos(\tilde{\phi}_{21} + \sigma_+) \cos(\theta + \tilde{\phi}(\theta)) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad - \sin(\tilde{\phi}_{21} + \sigma_+) \sin(\theta + \tilde{\phi}(\theta)), \\ \cos(\tilde{\phi}_{12} - \theta + \sigma_- + \tilde{\phi}(\theta)) = \cos(\tilde{\phi}_{12} + \sigma_-) \cos(\theta + \tilde{\phi}(\theta)) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad - \sin(\tilde{\phi}_{12} - \sigma_-) \sin(\theta + \tilde{\phi}(\theta)). \end{cases}$$

(a)  $e^{i(\theta + \tilde{\phi}(\theta))} = ie^{-i\sigma}$  の場合．

$\cos(\theta + \tilde{\phi}(\theta)) = \sin \sigma$ ， $\sin(\theta + \tilde{\phi}(\theta)) = \cos \sigma$  の関係に注意すると，

$$\begin{cases} \Re\{\bar{\alpha} \beta \tilde{f}^{(+)}(e^{i\theta})\} = -ab \sin(\tilde{\sigma} - \tilde{\phi}_{12}), \\ \Re\{\alpha \bar{\beta} \tilde{f}^{(-)}(e^{i\theta})\} = ab \sin(\tilde{\sigma} - \tilde{\phi}_{12}) \end{cases} \quad (6.14)$$

を得る．但し， $\tilde{\sigma} = (\sigma_+ + \sigma_-)/2$  とおいた．従って，

$$\|\operatorname{Res}(\tilde{\Xi}_0(z)\varphi : z = e^{i\theta})\|^2 = \frac{2}{|\tilde{\Lambda}'_0(e^{i\theta})|^2} \{1 + 2ab \sin(\tilde{\sigma} - \tilde{\phi}_{12})\}$$

が導かれる．ここで，

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}'_0(e^{i\theta}) &= \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \tilde{\Lambda}_0}{\partial \theta} \\ &= (-ie^{-i\theta}) \left\{ 2i \left( 1 + \frac{\partial \tilde{\phi}(\theta)}{\partial \theta} \right) \right\} e^{2i(\theta + \sigma + \tilde{\phi}(\theta))} \end{aligned}$$

の関係に注意すると，以下が得られる．

$$|\tilde{\Lambda}'_0(e^{i\theta})|^2 = 4 \left| 1 + \frac{\partial \tilde{\phi}(\theta)}{\partial \theta} \right|^2 \quad (6.15)$$

$$= \begin{cases} 4 \frac{(3 - 2\sqrt{2} \sin \sigma)^2}{(1 - \sqrt{2} \sin \sigma)^2} & (-1 \leq \sin \sigma \leq 1/\sqrt{2}), \\ 4 \frac{1}{(1 - \sqrt{2} \sin \sigma)^2} & (1/\sqrt{2} < \sin \sigma \leq 1). \end{cases} \quad (6.16)$$

但し，

$$\frac{\partial \tilde{\phi}(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\sqrt{2} \sin \theta}{\sin \tilde{\phi}(\theta)}$$

の関係に注意する．以上より

$$\|Res(\tilde{\Xi}_0(z)\varphi : z = e^{i\theta^{(+)}})\|^2 = \frac{(1 - \sqrt{2} \sin \sigma)^2}{2(3 - 2\sqrt{2} \sin \sigma)^2} \{1 + 2ab \sin(\tilde{\sigma} - \tilde{\phi}_{12})\} \quad (6.17)$$

となる．

(b)  $e^{i(\theta + \tilde{\phi}(\theta))} = -ie^{-i\sigma}$  の場合．

(a) と同様にして，

$$\|Res(\tilde{\Xi}_0(z)\varphi : e^{i\theta^{(-)}})\|^2 = \frac{2}{|\tilde{\Lambda}'_0(e^{i\theta})|^2} \{1 - 2ab \sin(\tilde{\sigma} - \tilde{\phi}_{12})\}$$

が導かれる．また，

$$|\tilde{\Lambda}'_0(e^{i\theta})|^2 = 4 \left| 1 + \frac{\partial \tilde{\phi}(\theta)}{\partial \theta} \right|^2 \quad (6.18)$$

$$= \begin{cases} 4 \frac{(3 + 2\sqrt{2} \sin \sigma)^2}{(1 + \sqrt{2} \sin \sigma)^2} & (-1/\sqrt{2} \leq \sin \sigma \leq 1), \\ 4 \frac{1}{(1 + \sqrt{2} \sin \sigma)^2} & (-1 \leq \sin \sigma \leq -1/\sqrt{2}) \end{cases} \quad (6.19)$$

以上より，

$$\|Res(\tilde{\Xi}_0(z)\varphi : z = e^{i\theta^{(-)}})\|^2 = \frac{(1 + \sqrt{2} \sin \sigma)^2}{2(3 + 2\sqrt{2} \sin \sigma)^2} \{1 - 2ab \sin(\tilde{\sigma} - \tilde{\phi}_{12})\} \quad (6.20)$$

となる．3式 (6.13), (6.17), (6.20), および，第5章系1より  $\bar{\mu}_\infty(0)$  を得る．

2.  $x \geq 1$  の場合．

補題9より,  $\tilde{\Xi}_x(z)\varphi$  は以下のように書ける.

$$\tilde{\Xi}_x(z)\varphi = -\frac{(\tilde{\lambda}^{(+)}(z))^{x-1}}{\tilde{\Lambda}_0(z)} \begin{bmatrix} (\tilde{\lambda}^{(+)}(z))\tilde{f}^{(+)}(z)(\alpha - \beta\tilde{f}^{(+)}(z)) \\ z(\alpha\tilde{f}^{(-)}(z) + \beta) \end{bmatrix}.$$

ここで,  $\|Res(\tilde{\Xi}_x(z)\varphi : z = e^{i\theta})\|^2$  を次のように定義する.

$$\|Res(\tilde{\Xi}_x(z)\varphi : z = e^{i\theta})\|^2 = \left| Res \left( -\frac{(\tilde{\lambda}^{(+)}(z))^x \tilde{f}_0^{(+)}(z)(\alpha - \beta\tilde{f}^{(+)}(z))}{\tilde{\Lambda}_0(z)} : z = e^{i\theta} \right) \right|^2 + \left| Res \left( -\frac{(\tilde{\lambda}^{(+)}(z))^{x-1} z(\alpha\tilde{f}^{(-)}(z) + \beta)}{\tilde{\Lambda}_0(z)} : z = e^{i\theta} \right) \right|^2.$$

$$Res \left( -\frac{(\tilde{\lambda}^{(+)}(z))^x \tilde{f}_0^{(+)}(z)(\alpha - \beta\tilde{f}^{(+)}(z))}{\tilde{\Lambda}_0(z)} : z = e^{i\theta} \right) = -\frac{(\tilde{\lambda}^{(+)}(e^{i\theta}))^x \tilde{f}_0^{(+)}(e^{i\theta})(\alpha\tilde{f}_0^{(-)}(e^{i\theta}) + \beta)}{\tilde{\Lambda}'_0(e^{i\theta})}$$

の関係に注意すると,

$$\left| Res \left( -\frac{(\tilde{\lambda}^{(+)}(z))^x \tilde{f}_0^{(+)}(z)(\alpha - \beta\tilde{f}^{(+)}(z))}{\tilde{\Lambda}_0(z)} : z = e^{i\theta} \right) \right|^2 = \frac{|\tilde{\lambda}^{(+)}(e^{i\theta})|^{2x}}{4 \left| 1 + \frac{\partial \tilde{\phi}(\theta)}{\partial \theta} \right|^2} \quad (6.21)$$

を得る. 同様にして,

$$\left| Res \left( -\frac{(\tilde{\lambda}^{(+)}(z))^{x-1} z(\alpha\tilde{f}^{(-)}(z) + \beta)}{\tilde{\Lambda}_0(z)} : z = e^{i\theta} \right) \right|^2 = \frac{|\tilde{\lambda}^{(+)}(e^{i\theta})|^{2(x-1)}}{4 \left| 1 + \frac{\partial \tilde{\phi}(\theta)}{\partial \theta} \right|^2} \quad (6.22)$$

が得られる. これより, 時間平均  $\bar{\mu}_\infty(x)$  は,

$$\bar{\mu}_\infty(x) = \sum_{\theta_s} \frac{|\tilde{\lambda}^{(+)}(e^{i\theta_s})|^{2(x-1)}}{4 \left| 1 + \frac{\partial \tilde{\phi}(\theta)}{\partial \theta} \right|^2} (1 + |\tilde{\lambda}^{(+)}(e^{i\theta_s})|^2) \quad (6.23)$$

と書ける. 但し,  $\{e^{i\theta_s}\}$  は  $\tilde{\Xi}_x(z)$  の特異点の集合である. 次に, 各特異点に対して  $|\tilde{\lambda}^{(+)}(e^{i\theta_s})|^2$  を計算する.  $\tilde{\lambda}^{(+)}(z)$  の定義より,

$$\tilde{\lambda}^{(+)}(e^{i\theta}) = \frac{1}{e^{i\tilde{\phi}(\theta)} - \sqrt{2}e^{-i\theta}}$$

である. 従って,

$$|\tilde{\lambda}^{(+)}(e^{i\theta})|^2 = \frac{1}{3 - 2\sqrt{2} \cos(\theta + \tilde{\phi}(\theta))}$$

を得る .

$$\cos(\theta + \tilde{\phi}(\theta)) = \begin{cases} \sin \sigma & (\theta = \theta_1^{(\pm)}) \\ -\sin \sigma & (\theta = \theta_2^{(\pm)}) \end{cases}$$

に注意すると ,

$$\begin{cases} |\tilde{\lambda}^{(+)}(e^{i\theta_1^{(\pm)}})|^2 = \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}\sin \sigma}, \\ |\tilde{\lambda}^{(+)}(e^{i\theta_2^{(\pm)}})|^2 = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}\sin \sigma} \end{cases} \quad (6.24)$$

となる . 4 式 (6.16), (6.19), (6.23), (6.24) より ,  $\bar{\mu}_\infty(x)$  が得られる .

3.  $x \leq -1$  の場合 .

2. と同様にして  $\bar{\mu}_\infty(x)$  ( $x \leq -1$ ) が導かれる .

### 6.3.3 定常測度

二相系量子ウォークに対して固有値問題

$$U^{(s)}\Psi = \lambda\Psi \quad (\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1) \quad (6.25)$$

を母関数を用いて解き , ある種の定常測度を導出した . 但し ,  $U^{(s)}$  は二相系量子ウォークに対する  $\infty \times \infty$  のユニタリ行列である . また ,  $\lambda$  は  $U^{(s)}$  の固有値 ,  $\Psi$  は固有ベクトルとする . ここで , 本章の研究では第 5 章の研究と同様の記法を用いて二相系量子ウォークの定常測度を

$$\mu(x) = |\Psi^L(x)|^2 + |\Psi^R(x)|^2 \quad (x \in \mathbb{Z}) \quad (6.26)$$

と定義する . 但し ,

$$\Psi(x) = \begin{bmatrix} \Psi^L(x) \\ \Psi^R(x) \end{bmatrix}$$

とおいた . はじめに命題 5 を得た .

命題 5. 固有値問題 (6.25) の解は以下ようになる . 以下 ,  $c \in \mathbb{C}$  とする .

$$1. \lambda^{(1)} = \frac{\cos \sigma + (\sin \sigma + \sqrt{2})i}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}\sin \sigma}}, \Psi^{(1)}(0) = T[\alpha^{(1)}, \beta^{(1)}] = \frac{c}{\sqrt{2}} T[1, -ie^{-(\sigma_+ + \sigma_-)i/2}].$$

$$\Psi^L(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{2}} \left( \frac{i}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}\sin \sigma}} \right)^x & (x = 1, 2, \dots), \\ \frac{c}{\sqrt{2}} & (x = 0), \\ \left( 1 + \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\sigma_+ + 3\sigma_-}{2}} \right) c \left( -\frac{i}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}\sin \sigma}} \right)^{-x} & (x = -1, -2, \dots). \end{cases}$$

$$\Psi^R(x) = \begin{cases} \left( \frac{e^{-i\sigma_+}}{\sqrt{2}} - ie^{-\frac{(\sigma_++\sigma_-)i}{2}} \right) c \left( \frac{i}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} \right)^x & (x = 1, 2, \dots), \\ -ie^{-\frac{(\sigma_++\sigma_-)i}{2}} \frac{c}{\sqrt{2}} & (x = 0), \\ -ie^{-\frac{(\sigma_++\sigma_-)i}{2}} \frac{c}{\sqrt{2}} \left( -\frac{i}{\sqrt{3+2\sqrt{2}\sin\sigma}} \right)^{-x} & (x = -1, -2, \dots). \end{cases}$$

2.  $\lambda^{(2)} = -\lambda^{(1)}$ ,  $\Psi^{(2)}(0) = \Psi^{(1)}(0) = T[\alpha^{(1)}, \beta^{(1)}]$ .

$$\Psi^L(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{2}} \left( -\frac{i}{\sqrt{3+2\sqrt{2}\sin\sigma}} \right)^x & (x = 1, 2, \dots), \\ \frac{c}{\sqrt{2}} & (x = 0), \\ \left( 1 + \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\sigma_++3\sigma_-}{2}} \right) c \left( -\frac{i}{\sqrt{3+2\sqrt{2}\sin\sigma}} \right)^{-x} & (x = -1, -2, \dots). \end{cases}$$

$$\Psi^R(x) = \begin{cases} \left( \frac{e^{-i\sigma_+}}{\sqrt{2}} - ie^{-\frac{(\sigma_++\sigma_-)i}{2}} \right) c \left( -\frac{i}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} \right)^x & (x = 1, 2, \dots), \\ -ie^{-\frac{(\sigma_++\sigma_-)i}{2}} \frac{c}{\sqrt{2}} & (x = 0), \\ -ie^{-\frac{(\sigma_++\sigma_-)i}{2}} \frac{c}{\sqrt{2}} \left( \frac{i}{\sqrt{3+2\sqrt{2}\sin\sigma}} \right)^{-x} & (x = -1, -2, \dots). \end{cases}$$

3.  $\lambda^{(3)} = -\frac{\cos\sigma + (\sin\sigma - \sqrt{2})i}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\sin\sigma}}$ ,  $\Psi^{(3)}(0) = T[\alpha^{(3)}, \beta^{(3)}] = \frac{c}{\sqrt{2}} T[1, ie^{-(\sigma_++\sigma_-)i/2}]$ .

$$\Psi^L(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{2}} \left( \frac{i}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\sin\sigma}} \right)^x & (x = 1, 2, \dots), \\ \frac{c}{\sqrt{2}} & (x = 0), \\ \left( 1 + \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\sigma_++3\sigma_-}{2}} \right) c \left( -\frac{i}{\sqrt{3+2\sqrt{2}\sin\sigma}} \right)^{-x} & (x = -1, -2, \dots). \end{cases}$$

$$\Psi^R(x) = \begin{cases} \left( \frac{e^{-i\sigma_+}}{\sqrt{2}} - ie^{-\frac{(\sigma_++\sigma_-)i}{2}} \right) c \left( \frac{i}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} \right)^x & (x = 1, 2, \dots), \\ ie^{-\frac{(\sigma_++\sigma_-)i}{2}} \frac{c}{\sqrt{2}} & (x = 0), \\ ie^{-\frac{(\sigma_++\sigma_-)i}{2}} \frac{c}{\sqrt{2}} \left( -\frac{i}{\sqrt{3+2\sqrt{2}\sin\sigma}} \right)^{-x} & (x = -1, -2, \dots). \end{cases}$$

4.  $\lambda^{(4)} = -\lambda^{(3)}$ ,  $\Psi^{(4)}(0) = \Psi^{(3)}(0) = T[\alpha^{(3)}, \beta^{(3)}]$ .

$$\Psi^L(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{2}} \left( -\frac{i}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2} \sin \sigma}} \right)^x & (x = 1, 2, \dots), \\ \frac{c}{\sqrt{2}} & (x = 0), \\ \left( 1 + \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\sigma_+ + 3\sigma_-}{2}} \right) c \left( \frac{i}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2} \sin \sigma}} \right)^{-x} & (x = -1, -2, \dots). \end{cases}$$

$$\Psi^R(x) = \begin{cases} \left( \frac{e^{-i\sigma_+}}{\sqrt{2}} - i e^{-\frac{(\sigma_+ + \sigma_-)i}{2}} \right) c \left( -\frac{i}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2} \sin \sigma}} \right)^x & (x = 1, 2, \dots), \\ i e^{-\frac{(\sigma_+ + \sigma_-)i}{2}} \frac{c}{\sqrt{2}} & (x = 0), \\ i e^{-\frac{(\sigma_+ + \sigma_-)i}{2}} \frac{c}{\sqrt{2}} \left( \frac{i}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2} \sin \sigma}} \right)^{-x} & (x = -1, -2, \dots). \end{cases}$$

本研究では定常測度が  $\mu(x) = |\Psi^L(x)|^2 + |\Psi^R(x)|^2$  と定義されることに注意すると，定理 12 が成り立つ．

**定理 12.** 固有値  $\lambda^{(j)}$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) に対する定常測度は以下のようになる．

1.  $\lambda^{(1)}$  と  $\lambda^{(2)}$  に対して，以下が成り立つ．

$$|\Psi^L(x)|^2 = \begin{cases} \frac{|c|^2}{2} \left( \frac{1}{3 + 2\sqrt{2} \sin \sigma} \right)^x & (x = 1, 2, \dots), \\ \frac{|c|^2}{2} & (x = 0), \\ \left\{ \frac{3}{2} + \sqrt{2} \sin \left( \frac{\sigma_+ + 3\sigma_-}{2} \right) \right\} |c|^2 \left( \frac{1}{3 + 2\sqrt{2} \sin \sigma} \right)^{-x} & (x = -1, -2, \dots). \end{cases}$$

$$|\Psi^R(x)|^2 = \begin{cases} \left( \frac{3}{2} + \sqrt{2} \sin \sigma \right) |c|^2 \left( \frac{1}{3 + 2\sqrt{2} \sin \sigma} \right)^x & (x = 1, 2, \dots), \\ \frac{|c|^2}{2} & (x = 0), \\ \frac{|c|^2}{2} \left( \frac{1}{3 + 2\sqrt{2} \sin \sigma} \right)^{-x} & (x = -1, -2, \dots). \end{cases}$$

従って，以下のように定常測度が導かれる．

$$\mu(x) = \begin{cases} (2 + \sqrt{2} \sin \sigma) |c|^2 \left( \frac{1}{3 + 2\sqrt{2} \sin \sigma} \right)^x & (x = 1, 2, \dots), \\ |c|^2 & (x = 0), \\ \left\{ 2 + \sqrt{2} \sin \left( \frac{\sigma_+ + 3\sigma_-}{2} \right) \right\} |c|^2 \left( \frac{1}{3 + 2\sqrt{2} \sin \sigma} \right)^{-x} & (x = -1, -2, \dots). \end{cases}$$

2.  $\lambda^{(3)}$  と  $\lambda^{(4)}$  に対して, 以下が成り立つ.

$$|\Psi^L(x)|^2 = \begin{cases} \frac{|c|^2}{2} \left( \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}\sin\sigma} \right)^x & (x = 1, 2, \dots), \\ \frac{|c|^2}{2} & (x = 0), \\ \left( \frac{3}{2} - \sqrt{2}\sin\sigma \right) |c|^2 \left( \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}\sin\sigma} \right)^{-x} & (x = -1, -2, \dots). \end{cases}$$

$$|\Psi^R(x)|^2 = \begin{cases} \left\{ \frac{3}{2} - \sqrt{2}\sin\sigma \right\} |c|^2 \left( \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}\sin\sigma} \right)^x & (x = 1, 2, \dots), \\ \frac{|c|^2}{2} & (x = 0), \\ \frac{|c|^2}{2} \left( \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}\sin\sigma} \right)^{-x} & (x = -1, -2, \dots). \end{cases}$$

従って, 以下のように定常測度が導かれる.

$$\mu(x) = \begin{cases} (2 - \sqrt{2}\sin\sigma) |c|^2 \left( \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}\sin\sigma} \right)^x & (x = 1, 2, \dots), \\ |c|^2 & (x = 0), \\ \left\{ 2 - \sqrt{2}\sin\left( \frac{\sigma_+ + 3\sigma_-}{2} \right) \right\} |c|^2 \left( \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}\sin\sigma} \right)^{-x} & (x = -1, -2, \dots). \end{cases}$$

### 6.3.4 定理 12 の証明

固有値問題

$$U^{(s)}\Psi = \lambda\Psi \quad (\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1) \quad (6.27)$$

を解く. 但し,  $U^{(s)}$  は二相系量子ウォークの時間発展を定義する  $\infty \times \infty$  のユニタリ行列である. 固有値問題 (6.27) は以下と同値であることに注意する.

$$\lambda\Psi(x) = P_{x+1}\Psi(x+1) + Q_{x-1}\Psi(x-1). \quad (6.28)$$

但し,

$$P_x = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & e^{i\sigma_{\pm}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & (x \neq 0), \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & (x = 0), \end{cases} \quad Q_x = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e^{-i\sigma_{\pm}} & -1 \end{bmatrix} & (x \neq 0), \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & (x = 0). \end{cases}$$

である. ここで,  $\sigma_{\pm} \in [0, 2\pi)$  であることに注意する. 固有値問題 (6.27) における解を各場所  $x \in \mathbb{Z}$  ごとに  $\Psi(x) = {}^T[\Psi^L(x), \Psi^R(x)]$  とおくと以下の関係式が成り立つ.



1.  $x = \pm 2, \pm 3, \dots$  の場合 .

$$\lambda \Psi^L(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi^L(x+1) + \frac{e^{i\sigma_+}}{\sqrt{2}} \Psi^R(x+1), \quad (6.29)$$

$$\lambda \Psi^R(x) = \frac{e^{-i\sigma_-}}{\sqrt{2}} \Psi^L(x-1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi^R(x-1). \quad (6.30)$$

2.  $x = 1$  の場合 .

$$\lambda \Psi^L(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi^L(2) + \frac{e^{i\sigma_+}}{\sqrt{2}} \Psi^R(2), \quad (6.31)$$

$$\lambda \Psi^R(1) = -\Psi^R(0). \quad (6.32)$$

3.  $x = -1$  の場合 .

$$\lambda \Psi^L(-1) = \Psi^L(0), \quad (6.33)$$

$$\lambda \Psi^R(-1) = \frac{e^{-i\sigma_-}}{\sqrt{2}} \Psi^L(-2) - \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi^R(-2). \quad (6.34)$$

4.  $x = 0$  の場合 .

$$\lambda \Psi^L(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi^L(1) + \frac{e^{i\sigma_+}}{\sqrt{2}} \Psi^R(1), \quad (6.35)$$

$$\lambda \Psi^R(0) = \frac{e^{-i\sigma_-}}{\sqrt{2}} \Psi^L(-1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi^R(-1). \quad (6.36)$$

ここで,  $\Psi^L(x)$  と  $\Psi^R(x)$  に対する母関数を導入する .  $j \in \{L, R\}$  として,

$$\begin{cases} f_+^j(z) = \sum_{x=1}^{\infty} \Psi^j(x) z^x, \\ f_-^j(z) = \sum_{x=-1}^{-\infty} \Psi^j(x) z^x. \end{cases} \quad (6.37)$$

とおく . このとき, 補題 10 が成り立つ .

補題 10.

$$A_{\pm} = \begin{bmatrix} \lambda - \frac{1}{\sqrt{2}\lambda} & -\frac{e^{i\sigma_{\pm}}}{\sqrt{2}z} \\ \pm \frac{e^{-i\sigma_{\pm}}}{\sqrt{2}} z & \mp \lambda + \frac{z}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{\pm}(z) = \begin{bmatrix} f_{\pm}^L(z) \\ f_{\pm}^R(z) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a}_+(z) = \begin{bmatrix} -\lambda\alpha \\ z\beta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_-(z) = \begin{bmatrix} z^{-1}\alpha \\ -\lambda\beta \end{bmatrix}$$

とおく. 但し,  $\omega = e^{2\pi i\phi}$  ( $\phi \in (0, 1)$ ),  $\alpha = \Psi^L(0)$  かつ  $\beta = \Psi^R(0)$ . このとき,

$$A_{\pm} \mathbf{f}_{\pm}(z) = \mathbf{a}_{\pm}(z) \quad (6.38)$$

の関係が成り立つ.

*Proof.* 式 (6.29) と (6.30) より, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} \lambda \sum_{x=2}^{\infty} \Psi^L(x) z^x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{x=2}^{\infty} \Psi^L(x+1) z^x + \frac{e^{i\sigma_+}}{\sqrt{2}} \sum_{x=2}^{\infty} \Psi^R(x+1) z^x, \\ \lambda \sum_{x=2}^{\infty} \Psi^R(x) z^x &= \frac{e^{-i\sigma_+}}{\sqrt{2}} \sum_{x=2}^{\infty} \Psi^L(x-1) z^x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{x=2}^{\infty} \Psi^R(x-1) z^x. \end{aligned}$$

これら 2 式より,

$$\begin{aligned} \left( \lambda - \frac{1}{\sqrt{2}z} \right) f_+^L(z) - \frac{e^{i\sigma_+}}{\sqrt{2}z} f_+^R(z) &= \lambda z \Psi^L(1) - \frac{z}{\sqrt{2}} (\Psi^L(2) + e^{i\sigma_+} \Psi^R(2)) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi^L(1) + e^{i\sigma_+} \Psi^R(1)), \end{aligned} \quad (6.39)$$

$$-e^{-i\sigma_+} \frac{z}{\sqrt{2}} f_+^L(z) \left( \lambda + \frac{z}{\sqrt{2}} \right) f_+^R(z) = -\lambda z \Psi^R(1) \quad (6.40)$$

を得る. 以下, この 2 式の右边を  $\Psi^L(0)$  と  $\Psi^R(0)$  で表す.  $\alpha = \Psi^L(0)$ ,  $\beta = \Psi^R(0)$  とおく. 式 (6.31) と (6.35) を式 (6.39) の右边に代入して,

$$\left( \lambda - \frac{1}{\sqrt{2}z} f_+^L(z) - \frac{e^{i\sigma_+}}{\sqrt{2}z} \right) f_+^R(z) = -\lambda \alpha \quad (6.41)$$

が得られる. また, 式 (6.32) を式 (6.40) の右边に代入して,

$$-e^{-i\sigma_+} \frac{z}{\sqrt{2}} f_+^L(z) \left( \lambda + \frac{z}{\sqrt{2}} \right) f_+^R(z) = z \Psi^R(0), \quad (6.42)$$

$$\lambda \Psi^L(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi^L(1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi^R(1)$$

を得る. 次に, 同様にして式 (6.29) と (6.30) より, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} \lambda \sum_{x=-2}^{-\infty} \Psi^L(x) z^x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{x=-2}^{-\infty} \Psi^L(x+1) z^x + \frac{e^{i\sigma_-}}{\sqrt{2}} \sum_{x=-2}^{-\infty} \Psi^R(x+1) z^x, \\ \lambda \sum_{x=-2}^{-\infty} \Psi^R(x) z^x &= \frac{e^{-i\sigma_-}}{\sqrt{2}} \sum_{x=-2}^{-\infty} \Psi^L(x-1) z^x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{x=-2}^{-\infty} \Psi^R(x-1) z^x. \end{aligned}$$

これら 2 式より ,

$$\left(\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}z}\right) f_-^L(z) - \frac{e^{i\sigma_-}}{\sqrt{2}z} f_-^R(z) = \frac{\lambda}{z} \Psi^L(-1), \quad (6.43)$$

$$\begin{aligned} \left(\lambda + \frac{z}{\sqrt{2}}\right) f_-^R(z) - \frac{e^{-i\sigma_-} z}{\sqrt{2}} f_-^L(z) &= \frac{\lambda}{z} \Psi^R(-1) - \frac{1}{\sqrt{2}z} (e^{-i\sigma_-} \Psi^L(-2) - \Psi^R(-2)) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\sigma_-} \Psi^L(-1) - \Psi^R(-1)) \end{aligned} \quad (6.44)$$

を得る. 式 (6.33) を式 (6.43) の右辺に代入して ,

$$\left(\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}z}\right) f_-^L(z) - \frac{e^{i\sigma_-}}{\sqrt{2}z} f_-^R(z) = z^{-1} \Psi^L(0) \quad (6.45)$$

が得られる . 式 (6.34) と式 (6.36) を式 (6.44) の右辺に代入して ,

$$\left(\lambda + \frac{z}{\sqrt{2}}\right) f_-^R(z) - \frac{e^{-i\sigma_-} z}{\sqrt{2}} f_-^L(z) = -\lambda \Psi^R(0) \quad (6.46)$$

が導かれる . 以上から , 補題 10 の証明が終わる .  $\square$

定理 12 の証明に戻る . 補題 10 の式 (6.38) を解く .  $\theta_s, \theta_l \in \mathbb{C}$  を以下を満たすようにとる .

$$\det A_+ = -\frac{\lambda}{\sqrt{2}z} \left\{ z^2 - \sqrt{2} \left( \frac{1}{\lambda} - \lambda \right) z - 1 \right\} \quad (6.47)$$

$$= \frac{\lambda}{\sqrt{2}z} (z - \theta_l)(z - \theta_s). \quad (6.48)$$

但し ,  $|\theta_s| \leq 1 \leq |\theta_l|$ .

式 (6.47) に注意すると ,  $\theta_s \theta_l = -1$  である . 次に , 補題 10 を用いて固有値問題 (6.27) における固有ベクトル  $\Psi$  を各場所  $x$  ごとに導出していく .

1.  $f_+^L(z)$  について .

$$\begin{aligned} f_+^L(z) &= \frac{1}{\det A_+} \left\{ - \left( \lambda + \frac{z}{\sqrt{2}} \right) (-\lambda\alpha) + \frac{e^{i\sigma_+}}{\sqrt{2}z} z\beta \right\} \\ &= -\frac{z\alpha}{(z - \theta_s)(z - \theta_l)} \left\{ z + \sqrt{2}\lambda + \frac{\beta e^{i\sigma_+}}{\lambda\alpha} \right\}. \end{aligned}$$

ここで ,  $\theta_s = -\sqrt{2}\lambda - \frac{\beta e^{i\sigma_+}}{\lambda\alpha}$  とおくと ,

$$\begin{aligned} f_+^L(z) &= -\frac{\alpha z}{z - \theta_l} = -\frac{\alpha z}{z + \theta_s^{-1}} = \frac{-\alpha \theta_s z}{1 + \theta_s z} \\ &= -\alpha \theta_s z \{ 1 + (-\theta_s z) + (-\theta_s z)^2 + \dots \} \\ &= \alpha \sum_{x=1}^{\infty} (-\theta_s z)^x \end{aligned} \quad (6.49)$$

が導かれる．即ち，

$$f_+^L(z) = \sum_{x=1}^{\infty} (-\theta_s z)^x. \quad (6.50)$$

従って，式 (6.50) と  $f_+^L(z)$  の定義より，

$$\Psi^L(x) = \alpha(-\theta_s)^x \quad (x \geq 1). \quad (6.51)$$

を得る．但し，

$$\theta_s = -\sqrt{2}\lambda - \frac{\beta e^{i\sigma_+}}{\lambda\alpha}. \quad (6.52)$$

2.  $f_+^R(z)$  について．

同様に， $\theta_s = \frac{\beta}{\lambda(\alpha e^{-i\sigma_+} + \sqrt{2}\beta)}$  とおくと，

$$\begin{aligned} f_+^R(z) &= -\frac{(\alpha e^{-i\sigma_+} + \sqrt{2}\beta)z}{z - \theta_s^{-1}} = -\frac{(\alpha e^{-i\sigma_+} + \sqrt{2}\beta)z}{z + \theta_s} = -\frac{(\alpha e^{-i\sigma_+} + \sqrt{2}\beta)\theta_s z}{1 + \theta_s z} \\ &= -(\alpha e^{-i\sigma_+} + \sqrt{2}\beta)\theta_s z \{1 + (-\theta_s z) + (-\theta_s z)^2 + \dots\} \\ &= (\alpha e^{-i\sigma_+} + \sqrt{2}\beta) \sum_{x=1}^{\infty} (-\theta_s)^x z^x \end{aligned}$$

が導かれる．即ち，

$$f_+^R(z) = (\alpha e^{-i\sigma_+} + \sqrt{2}\beta) \sum_{x=1}^{\infty} (-\theta_s)^x z^x. \quad (6.53)$$

従って

$$\Psi^R(x) = (\alpha e^{-i\sigma_+} + \sqrt{2}\beta)(-\theta_s)^x \quad (x \geq 1) \quad (6.54)$$

を得る．但し，

$$\theta_s = \frac{\beta}{\lambda(\alpha e^{-i\sigma_+} + \sqrt{2}\beta)}. \quad (6.55)$$

3.  $f_-^L(z)$  について．

同様に,  $\theta_l^{-1} = -\frac{\alpha}{\lambda(\sqrt{2}\alpha - \beta e^{i\sigma_-})}$  とおくと,

$$f_-^L(z) = \frac{\theta_s^{-1}\theta_l^{-1}z^{-1}(\beta e^{i\sigma_-} - \sqrt{2}\alpha)}{z^{-1} - \theta_s^{-1}} = \frac{\theta_s z^{-1}(\beta e^{\sqrt{2}\alpha} - i\sigma_-)}{1 - \theta_s z^{-1}} \quad (6.56)$$

$$= \theta_s z^{-1}(\sqrt{2}\alpha - \beta e^{i\sigma_-})\{1 + \theta_s z^{-1} + (\theta_s z^{-1})^2 + \dots\} \quad (6.57)$$

$$= (\beta e^{i\sigma_-} - \sqrt{2}\alpha) \sum_{x=-1}^{-\infty} (-\theta_s^{-1}z)^x \quad (6.58)$$

$$= (\beta e^{i\sigma_-} - \sqrt{2}\alpha) \sum_{x=-1}^{-\infty} (-\theta_l z)^x \quad (6.59)$$

が導かれる。即ち,

$$f_-^L(z) = (\beta e^{i\sigma_-} - \sqrt{2}\alpha) \sum_{x=-1}^{-\infty} (-\theta_l z)^x. \quad (6.60)$$

従って,

$$\Psi^L(x) = (\beta e^{i\sigma_-} - \sqrt{2}\alpha)(-\theta_l)^x \quad (x \leq -1) \quad (6.61)$$

を得る。但し,

$$\theta_l = -\frac{\lambda(\sqrt{2}\alpha - \beta e^{i\sigma_-})}{\alpha}. \quad (6.62)$$

4.  $f_-^R(z)$  について.

同様に,  $\theta_l^{-1} = \sqrt{2}\lambda - \frac{\alpha e^{-i\sigma_-}}{\lambda\beta}$  とおくと,

$$\begin{aligned} f_-^R(z) &= \frac{\theta_s^{-1}\theta_l^{-1}z^{-1}\beta}{z^{-1} - \theta_s^{-1}} = \frac{-\beta\theta_l^{-1}z^{-1}}{1 - \theta_s z^{-1}} \\ &= \beta\theta_s z^{-1}\{1 + (\theta_s z^{-1}) + (\theta_s z^{-1})^2 + \dots\} \\ &= \sum_{x=-1}^{-\infty} \beta(-\theta_l)^x z^x \end{aligned}$$

が導かれる。即ち,

$$f_-^R(z) = \sum_{x=-1}^{-\infty} \beta(-\theta_l)^x z^x. \quad (6.63)$$

従って,

$$\Psi^R(x) = \beta(-\theta_l)^x \quad (6.64)$$

を得る. 但し,

$$\theta_l = \frac{\lambda\beta}{\sqrt{2}\lambda^2\beta - \alpha e^{-i\sigma_-}}. \quad (6.65)$$

次に,  $\theta_s$  の4つの表式 (6.52), (6.62), (6.55), (6.65) より,

$$\begin{aligned} -\sqrt{2}\lambda - \frac{\beta e^{i\sigma_+}}{\lambda\alpha} &= \frac{\beta}{\lambda(\alpha e^{-i\sigma_+} + \sqrt{2}\beta)} \\ &= \frac{\alpha}{\lambda(\sqrt{2}\alpha - \beta e^{i\sigma_-})} \\ &= \frac{\alpha e^{-i\sigma_-}}{\lambda\beta} - \lambda\sqrt{2}. \end{aligned}$$

また,

$$\alpha = \pm i\beta e^{i\tilde{\sigma}}. \quad (6.66)$$

但し,  $\tilde{\sigma} = (\sigma_+ + \sigma_-)/2$ .

以上より, 命題5が得られた. 定常測度が  $\mu(x) = |\Psi^L(x)|^2 + |\Psi^R(x)|^2$  で定義されることに注意すると, 定理12が導かれる.

## 6.4 研究考察

### 6.4.1 シミュレーション結果との対応

以下に, 初期状態  $\varphi = {}^T[1, 0]$  と  $\varphi = {}^T[0, 1]$  の場合に, 時刻500における確率分布と時間平均極限をシミュレーションした結果を載せる.

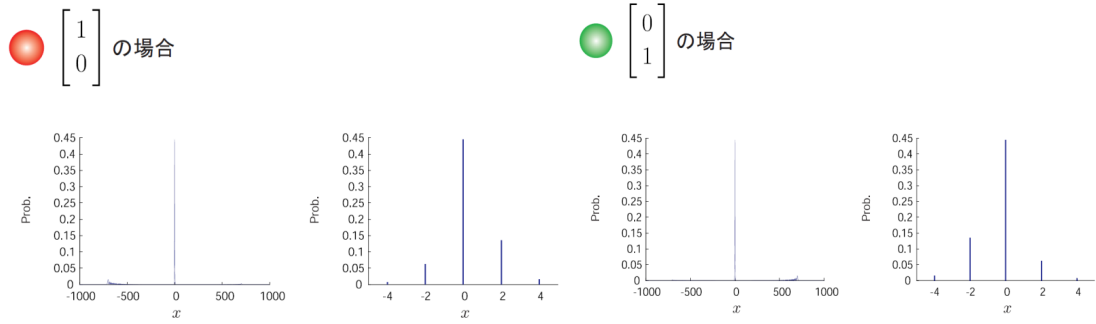


図 6.1: 時刻 500 における二相系量子ウォークの確率分布

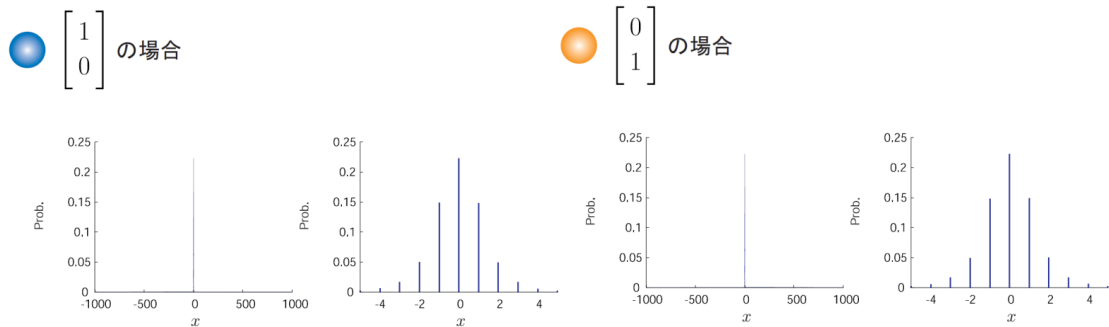


図 6.2: 時刻 500 における二相系量子ウォークの時間平均

これより，時間平均極限測度は原点に関して対称であるにも関わらず，確率分布は原点に関して非対称になる場合もあることが分かる．確率分布の非対称性は時間平均極限測度には表れていないことから，弱収束極限測度の拡散項で表されると示唆される．

### 6.4.2 時間平均極限測度と定常測度の対応

モデルのパラメータ  $\sigma_+$ ,  $\sigma_-$  が以下のような場合に限り, 時間平均極限測度と定常測度が一致する.

$$\begin{cases} |c|^2 = \bar{\mu}_\infty(0), \\ \sigma_+ + \sigma_- = (2k + 1)\pi, \text{ or } \sigma_- = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

## 6.5 本章のまとめと今後の展望

本章の研究では,

- 典型的な非対称量子ウォークの1つである二相系量子ウォークに対して, 2種類の母関数法を用いて時間平均極限測度と定常測度を導出した.
- 時間平均極限測度は原点对称性を持ち, 二相系量子ウォークは初期状態  $\varphi$  やパラメータ  $\sigma$  に依らずに局在化を起こすことが分かった.
- 定常測度は原点に関して対称性を持たず, 場所に関して指数的に減衰する.
- シミュレーション結果では, 確率分布は初期状態やモデルのパラメータに依存して原点に関して非対称になる場合もあるが, この非対称性は弱収束極限測度の拡散項で記述される, と示唆される.
- 定常測度は時間平均極限測度と完全には一致しないが, パラメータの選び方により一致する場合もある.

今後は,

- 弱収束極限測度の拡散項を時空間母関数法を用いて導出し, 二相系量子ウォークの漸近挙動の特性を明らかにする.
- 二相系量子ウォークの時間平均極限測度と定常測度の関係の定性的な意味を明らかにし, 量子統計物理学や量子情報学との関連を模索する.



## 第7章 総括

### 7.1 本論文のまとめ

本論文では、母関数を用いた複数の方法を2種類の量子ウォークの漸近解析に用い、局在化に対応する数学的な表式を導出するとともに、空間的に非一様な量子ウォークの漸近挙動の解析手法の改善、構築を試みた。具体的には、1次元系における場所に関して非一様な2つの量子ウォークの解析を通して、時空間母関数法と分離型母関数法の適用範囲を調べた。また、2つの量子ウォークの時間平均極限測度と定常測度の特徴や関係を調べることで、モデルの特性を調べようとした。

- 「Wojcik モデルの極限定理」の研究では、Wojcik *et al.* [47] で導入され研究された量子ウォークの時間平均極限測度と定常測度を導出し、Wojcik モデルに対する局在化を表す数学的な表式を与えた。局在化はモデルのパラメータや初期状態に強く依存し、時間平均極限測度と定常測度は共に原点对称性を持ち、定常測度は場所に関して指数的に減少することが分かった。そして、時間平均極限測度が定常測度を完全に含む形をしており、Wojcik モデルは時空間母関数法と分離型母関数法が適用できる良い例であるとも考えられる。また、パスの方法、CGMV 法、時空間母関数法の3種類の方法で求めた原点における時間平均極限測度が全て一致した。このことは、時空間母関数法が Wojcik モデルに対して有効であることを示唆する。

- 「二相系量子ウォークの極限定理」の研究では、原点のみユニタリ行列が異なる量子ウォークを自然に非対称化したモデルとして原点に関して非対称な挙動をする二相系量子ウォークを提案した。本研究により、非対称な一次元離散時間量子ウォークに対して初めて時間平均極限測度、即ち局在化を表す数学的な表式が与えられた。局在化はモデルのパラメータ  $\sigma_{\pm}$  や初期状態に依存せずに起こり、時間平均極限測度と定常測度は共に原点に関して対称性を持ち、定常測度は場所に関して指数的に減少することが分かった。そして、モデルのパラメータが特殊な周期性を持つ場合に限り、時間平均極限測度と定常測度が完全に一致することが分かった。また、いくつかの初期状態やパラメータに対する時刻 500 におけるシミュレーションでは、確率分布の時間平均は原点对称性を持つが確率分布は原点に関して非対称になる場合もあった。従って、確率分布の非対称性は時間平均極限測度ではなく、弱収束極限測度によって記述されると示唆される。

## 7.2 今後の研究の方向性

- 時間平均極限測度と定常測度が一致する，あるいは良い関係がある量子ウォークはどのようなタイプの量子ウォークか，を調べる．
- 時間平均極限測度と定常測度の関係の定性的な意味は何か，を検証する．
- 時空間母関数法の拡張や非一様量子ウォークの他の解析方法の構築．
- 時空間母関数法や分離型母関数法などの適用限界を模索し，空間的に非一様な量子ウォークの解析方法の構築につなげる．
- 2次元系をはじめとする高次元系の量子ウォークの解析方法の構築．

## 参考文献

- [1] Aharonov, Y., Davidovich, L., Zagury, N.:Quantum random walks, *Phys. Rev. A*, **48**, 16871690 (1993).
- [2] Ambainis, A., Bach, E., Nayak, A., Vishwanath, A., and Watrous, J.:One-dimensional quantum walks, *Proc. of the 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 3749 (2001).
- [3] Ambainis, A.:Quantum walk algorithm for element distinctness, *SIAM J. Comput.*, **37**, 210239 (2007).
- [4] Cantero, M. J., Grunbaum, F. A., Moral, L., and Velazquez, L.:One-dimensional quantum walks with one defect, *Rev. Math. Phys.*, **24**, 1250002 (2012).
- [5] Chisaki, K., Hamada, M. , N. Konno and E. Segawa:Limit theorems for discrete-time quantum walks on trees, *Interdisciplinary Information Sciences*, **15**, 423429 (2009).
- [6] Emms, D., Hancock, E. R., Severini, S., Wilson, R. C.:A matrix representation of graphs and its spectrum as a graph invariant, *Electr. J. Comb* (2006).
- [7] Endo, T., Konno, N., Segawa, E., and Takei, M.:A one-dimensional Hadamard walk with one defect, *Submitted to Yokohama Mathematical Journal* (2014).
- [8] Endo, T., Konno, N., Segawa, E., and Takei, M.:Localization of a two-phase quantum walk with one-defect (in preparation).
- [9] Faggionato, A. and Silvestri, V.:Random walks on quasi one dimensional lattices and applications to molecular motors, *arXiv:1401.2256* (2014).
- [10] Farhi, E. and Gutmann, S.:Quantum computation and decision trees, *Phys. Rev. A* **58**, 915 (1998).
- [11] Grimmett, G., Janson, S., and Scudo, P.:Weak limits for quantum random walks, *Phys. Rev. E*, **69**, 026119 (2004).
- [12] Grover, L. K.:A fast quantum mechanical algorithm for database search. In *Proc. of the 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing (STOC)*, 212219 (1996).
- [13] Gudder, S. P.:Quantum probability, Academic Press Inc., CA (1988).

- [14] 舟木直久：確率論，朝倉書店 (2004).
- [15] Inui, K., Konno, N., and Segawa, E.:One-dimensional three-state quantum walk, Phys. Rev. E, **72** 056112 (2005).
- [16] Karski, M., Förster, L., Choi, Jai-Min, Steffen, A., Alt, W., Meschede, D., and Widera, A. :Quantum walk in position space with single optically trapped atoms, Science, **325**, 174177 (2009).
- [17] Kempe, J.:Quantum random walks, an introductory overview, Contemporary Physics, **44**, 307327 (2003).
- [18] Kitagawa, T., M. S. Rudner, E. Berg, and E. Demler:Exploring topological phases with quantum walks, Phys. Rev. A **82**, 033429 (2010).
- [19] Ko, C. K. and Yoo, H. J.:The generator and quantum Markov semigroup for quantum walks, Kodai Math. J., **36**, 363385 (2013).
- [20] Konno, N.:Quantum random walks in one dimension, Quantum Information Processing, **1**, 345354 (2002).
- [21] Konno, N.:A new type of limit theorems for the one-dimensional quantum random walk: J. Math. Soc. Jpn. **57**, 9351234 (2005).
- [22] Konno, N. : Quantum Walks (量子ウォークの数理), 産業図書 (2008).
- [23] Konno, N.:Localization of an inhomogeneous discrete time quantum walk on the line, Quantum Information Processing, **9**, 405418 (2010).
- [24] 今野紀雄教授：「非線形物理の新展開」講演録，お茶の水女子大学 (2011).
- [25] Konno, N., T. Luczak, and Segawa, E.:Limit measures of inhomogeneous discrete-time quantum walks in one dimension, **12**, 3353 (2013).
- [26] Konno, N.:The uniform measure for discrete-time quantum walk in one dimension, Quantum Information Processing, 1573-1332 (2013).
- [27] Konno, N. and Watanabe, T.:The stationary measure of a space-inhomogeneous quantum walk on the line, Yokohama Mathematical Journal [Accepted, (2013)].
- [28] Konno, N. and Watanabe, T.:The time-averaged limit measure of the Wojcik model, arXiv: 1401.3070 (2014).
- [29] 今野紀雄：「量子ウォーク入門・基礎・応用」(横浜国立大学 理工学部 数理科学 EP 3年ゼミ「数理科学演習 A」「数理科学演習 B」配布テキスト) (2013).

- [30] Meyer, D. A.:From quantum cellular automata to quantum lattice gases, *J. Stat. Phys.*, **85** 551574 (1996).
- [31] Mohseni, M., Reberntrost, P., Lloyd, S., Aspuru-Guzik, A.:Environment-assisted quantum walks in photosynthetic energy transfer, *Journal of Chemical Physics*, **129**, 174106 (2008).
- [32] Mulken, O., Pernice, V., Blumen, A.:Quantum transport on small-world networks: A continuous -time quantum walk approach, *Phys. Rev. E* **76**, 051125 (2007).
- [33] Nayak, A. and Vishwanath, A.:Quantum walk on the line, arXiv:quant-ph/0010117 (2000).
- [34] Oka, T., Konno, N., Arita, R., and Aoki, H.:Breakdown of an electric-field driven system:A mapping to a quantum walk, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 100602 (2005).
- [35] Reitzner, D. , Nagaj, D., and Buzek, V.:Quantum walks, *Acta Physica Slovaca* **61**, 603725 (2011).
- [36] Scalas, E.:The application of continuous-time random walks in finance and economics, *Phys. A, Statistical Mechanics and its Applications*, **362** 225239 (2006).
- [37] Schreiber, A., Cassemiro, K. N., Potocek, V., Gâbris, A., Mosley, P. J., Andersson, E., Jex, I., and Silberhorn, Ch.:Photons walking the line: a quantum walk with adjustable coin operations, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 050502 (2010).
- [38] Schreiber, A., Gâbris, A., Rohde, Peter P., Laiho, K., Štefaňák, M., Potoček, V., Hamilton, K., Jex, I., Silberhorn, C.:A 2D quantum walk simulation of two-particle dynamics, *Science* **336**, 5558 (2012).
- [39] Shenvi, N., Kempe, J., and Whaley, K. B.:Quantum random-walk search algorithm, *Phys. Rev. A*, **67**, 052307 (2003).
- [40] 志賀徳道：ルベーク積分から確率論，共立出版株式会社，(2006).
- [41] Spitzer, F.:Principles of random walk, 2nd ed., Springer-Verlag, New York. (1976).
- [42] 寺本英：ランダムな現象の数学，吉岡書店，(1990) .
- [43] 津野義道：ランダム・ウォーク，乱れに潜む不思議な現象，牧野書店，(200k2).
- [44] Venegas-Andraca, S. E. :Quantum walks for computer scientists, Morgan and Claypool. **1**, 1119 (2008).
- [45] Venegas-Andraca, S. E. :Quantum walks, a comprehensive review, *Quantum Information Processing*, **11**, 10151106 (2012).

- [46] Weiss, G., H.: Random walks and their applications: Widely used as mathematical models, random walks play an important role in several areas of physics, chemistry, and biology, *AS*, **71**, 6571, (1983).
- [47] Wojcik, A., Luczak, T., Kurzynski, P., Grudka, A., Gdala, T., and Bednarska-Bzdega, M.: Trapping a particle of a quantum walk on the line, *Phys. Rev. A*, **85**, 012329 (2012).
- [48] Xu, X., Liu, F.: Coherent exciton transport on scale-free networks, *New Journal of Physics* **10**, 123012 (2008).
- [49] Xu, X., Liu, F.: Continuous-time quantum walks on Erdős-Rényi networks, *Phys. Lett. A*, **372**, 67276732 (2008).
- [50] Zahringer, F., Kirchmair, G., Gerritsma, R., Solano, E., Blatt, R., and Roos, C. F.: Realization of a Quantum walk with one and two trapped Ions, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 100503 (2010).

## その他本論文の研究にあたり参考にした文献

1. Aharonov, D., Ambainis, A., Kempe, J., and Vazirani, U. V.: Quantum walks on graphs, *Proc. of the 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 5059, quant-ph/0012090 (2001).
2. Ahlbrecht, A., Alberti, A., Meschede, D., Scholz, V. B., Werner, A. H., and Werner, R. F.: Bound molecules in an interacting quantum walk, arXiv:1105.1051 (2011).
3. Ahlbrecht, A., Scholz, V. B., and Werner, A. H.: Disordered quantum walks in one lattice dimension, *J. Math. Phys.* **52**, 102201 (2011).
4. Flajolet, P., and Sedgewick, R.: *Analytic Combinatorics*: Cambridge University Press (2009).
5. Inui, K., Konishi, Y., and Konno, N.: Localization of two-dimensional quantum walks: *Phys. Rev. A* **69**, 052323 (2003).
6. Joye, A. and Merkli, M.: Dynamical localization of quantum walks in random environments, *J. Stat. Phys.* **140** 10231053 (2010).

7. Konno, N.:A path integral approach for disordered quantum walks in one dimension, *Fluctuation and Noise Letters* **5** (2005).
8. 町田拓也氏 学位論文：時間依存型 1 次元離散時間の極限定理 横浜国立大学 (2010).
9. Mackay, T. D., Bartlett, S. D., Stephenson, L. T., and Sanders, B. C.:Quantum walks in higher dimensions, *J. Phys. A*, **35**, 2745 (2002).
10. Pathak, P. K. and Agarwal, G. S.:Quantum random walk of two photons in separable and entangled state, *Phys. Rev. A* **75**, 032351 (2007).
11. Ribeiro, P., Milman, P., Mosseri, R.:A periodic quantum random walks: *Phys. Rev. Lett.* **93**, 190503 (2004).
12. Schreiber, A., Cassemiro, K. N., Potocek, V., Gabris, A., Mosley, P.J., Andersson, E., Jex, I., Silberhorn, Ch.:Photons walking the line: A quantum walk with adjustable coin operations, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 050502 (2010).
13. Shikano, Y., Chisaki, K., Segawa, E., and Konno, N.:Emergence of randomness and arrow of time in quantum walks, *Phys. Rev. A* **81**, 062129 (2010).
14. Tregenna, B., Flanagan, T., Maile, R., and Kendon, V.:Controlling discrete quantum walks: coins and initial states, *New J. Phys.* **83** (2003).
15. Watabe, K., Kobayashi, N., Katori, M., and Konno, N.:Limit distributions of two-dimensional quantum walks, *Phys. Rev. A* **77** (2008).

## 謝辞

本研究を進めるにあたり、横浜国立大学の今野紀雄教授から熱心な御指導を賜りました。博士後期課程二年生の夏から約一年半の間、今野教授の変わらない気さくなお人柄により私はいつも安定して研究に取り組める環境で過ごすことができました。今野教授には、量子ウォークを中心とする数理モデルに関して興味深いことをたくさん御教授を賜りました。また、学問以外にも数学者としての研究に対する姿勢や研究者としてのあり方なども学ばせて頂きました。何より私が他大学の学生であるにも拘らず、量子ウォークの最先端の研究に誘って頂いたこと、私の量子ウォークや計算に対する好奇心や愛情をいつも大切にして下さったこと、論文作成の際には良い文章が書けるようになるまで何度も丁寧な御指導を賜ったことなど、心より深く感謝申し上げます。数理科学 EP 代表という大変御多忙な中、貴重なお時間を割いて御指導頂き本当にありがとうございました。

東北大学情報科学研究科・尾畑研究室の瀬川悦生助教には、本研究を進めるにあたり大変御世話になりました。本論文の時間平均極限測度の計算方法や弱収束極限測度について初歩から丁寧に教えて頂きました。量子ウォークについて全く知識のなかった私にとって、瀬川助教の御指導は現在大きな財産となっています。また、論文の添削もして頂きました。ご多忙な中、貴重な御時間を割いて御指導頂き本当にありがとうございました。今野研究室卒業生の井手勇介助教(神奈川大学)と町田拓也研究員(東京大学, UC バークレー数学教室, 日本学術振興会特別研究員)には、研究や進路の相談に乗って頂くなど大変御世話になりました。精力的に量子ウォークの研究をされている皆さんの姿には大きな刺激を受けました。本当にありがとうございました。

今野研究室の学生さん達には、いつも温かく接して下さいました。おかげさまですぐに研究室に馴染むことが出来ました。どうもありがとうございました。

広島大学工学系研究院の松岡雷士助教には、2013年8月の日本原子力研究開発機構 関西光科学研究所での夏季実習にて量子ウォークの実験による実現方法を解説して頂いたり、C++の入門講義をして頂いたりしました。今後量子ウォークの研究にはプログラミングが必要になってくるため、実習は大変参考になりました。ここに御礼申し上げます。

博士後期課程に進学する直前の2011年3月に東日本大震災がありました。実際に宮城県にある実家が罹災し精神的に弱っている時期に、量子ウォークの斬新で広大な世界は私を虜にし強く元気にしてくれました。

お茶の水女子大学理学部物理学科の出口哲生教授には、博士後期課程に入学してからの三年間、不甲斐ない私を受け入れて下さいました。博士課程一年生のときには可解モデルの基礎を御教授頂きました。もともと物理学の知識がほとんど無かった私に学問的な知識のみならず、物理学の幅広い視点を学ばせて頂きました。多角的な見方が出来るようになったことは、研究を



続けるうえで大きな財産になっていくと思います。また、私が横浜国立大学で研究を行うことになってリサーチ・アシスタントの申請の際に推薦書を書いて下さったり、物理学会の旅費の補助をして頂いたり、事務的なことでも大変御世話になりました。厚く御礼申し上げます。

お茶の水女子大学理学部数学科の真島秀行教授、萩田真理子准教授には博士後期課程において副指導教員を務めて頂きました。真島秀行教授には理学部数学科に在籍していた学部生のときから、講義を通して大変お世話になりました。数学の奥深い魅力に感動することの素晴らしさを学ばせて頂きました。萩田真理子准教授には卒業研究、および修士課程における研究の御指導を賜りました。組み合わせ論やグラフ理論の知識は、量子ウォークの研究を行う上でも非常に活かされています。御二方に深く御礼申し上げます。

数学科同期の荒川麻由子さん、大山口菜都美さん、情報科学科同期の池田さつきジェシカさん、間宮直子さん、山口真実さん、物理学科同期の上西慧理子さん、坂下あいさん、竹原由佳さん、松尾光さんには、いつも明るく声をかけて頂きました。皆さんの笑顔には何度も精神的に救われました。心から感謝致します。

最後に、私の良き理解者でありいつも温かく見守ってくれた夫、そして家族と出口研究室の皆様心から感謝致します。