論　文　要　旨

The geometric structures of the associative Grassmann manifold and their applications

(associative グラスマン多様体の幾何構造とその応用)

榎吉 奏子

八元数の任意の四元数部分代数の純虚 3 次元部分空間で, 四元数代数から定まる向きを備えたものを associative 部分空間という．associative 部分空間全体のなす集合を associative グラスマン多様体という．本論文の目的は, associative グラスマン多様体の Riemann 対称対や四元数ケーラー構造といった幾何学的特徴を明らかにすることによって, associative グラスマン多様体に関わる新たな幾何学的知見を得ることである．

八元数の自己同型群である例外型 Lie 群 G_2 は, associative グラスマン多様体に推移的に作用し, 純虚四元数全体の集合における等方部分群は $SO(4)$ であることから, associative グラスマン多様体は 8 次元の Riemann 対称空間 $G_2/SO(4)$ と同一視されることが知られている．そして, associative グラスマン多様体は, 8 種類あるコンパクト対称四元数ケーラー多様体のうちの 1 つであることが知られている．四元数ケーラー構造は興味深い, そして応用の可能性のある構造である．四元数ケーラー多様体の部分多様体論も活発に研究されており, 特に複素部分多様体に関する研究は, 複素微分幾何学と四元数微分幾何学が相互作用する四元数複素微分幾何学とでも呼ぶべき興味深い研究領域をなす．そこで, associative グラスマン多様体の四元数ケーラー構造を具体的に記述し, 複素部分多様体論を展開することは, 大変意義のあることだと考えられる．

一方, 例外型 Lie 群 G_2 は, 幾何学の様々な分野で重要な役割を果たしている．例えば, 純虚八元数上で定義される associative キャリブレーションや coassociative キャリブレーションにより特徴づけらる部分多様体の研究が進められている．associative グラスマン多様体は, associative キャリブレーションの値が 1 となる部分空間のなす多様体である．純虚八元数内の 6 次元単位球面には, 八元数から誘導される概複素構造が定まることが知られており, $G_2/SU(3)$ と同一視される．その概複素部分多様体やラグランジュ部分多様体に関する知見が多く得られている．このように, 例外型 Lie 群 G_2 の幾何学では実り豊かな研究がなされている．

そこで, 四元数微分幾何学と G_2 幾何学の両方が交差する associative グラスマン多様体は大変興味深い研究対象であると考えられる．

本論文は 6 節からなる．各節の内容は以下の通りである:

第 1 節では, 四元数代数 $\mathbb{H}$ や八元数代数 $\mathbb{O}$, 例外型 Lie 群 G_2 に関する基本事項を述べる．そして, グラスマン多様体 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ における associative キャリブレーションの等位集合 $\tilde{M}(t)$ $(-1 \leq t \leq 1)$ を定義する．ここで, $\widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ は八元数の虚部 $\mathrm{Im}\mathbb{O}$ の向き付けられた 3 次元部分空間全体のなすグラスマン多様体を表す．等位集合 $\tilde{M}(t)$ は G_2-軌道になる．従って, $-1 < t < 1$ に対し, $\tilde{M}(t)$ は $\widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ の等質超曲面である．そして, $\tilde{M}(1)$ は $\widetilde{\mathrm{Gr}}_{ass}(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ に一致する．

第 2 節では, グラスマン多様体 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ と associative グラスマン多様体に対応する Riemann 対称対をそれぞれ具体的に構成する．さらに, 例外型 Lie 群 G_2 の Lie 環 $\mathfrak{g}_2$ を標準分解して得られる Lie 環の基底を具体的に与え, associative グラスマン多様体の原点 $\mathrm{Im}\mathbb{H}$ における接空間を, 行列を用いて表示する．この行列表示が第 4 節で行われる主曲率の計算において非常に大きな役

割を果たす.

第 3 節において, 四元数ケーラー構造の定義を与える. そして, associative グラスマン多様体の四元数ケーラー構造を 2 通りの方法で記述する. 1 つ目は, associative グラスマン多様体の $\mathrm{Im}\mathbb{H}$ における接空間を, $\mathrm{Im}\mathbb{H}$ から $\mathbb{H}$ への線形準同型写像のなす空間で, ある条件を満たすものと同一視した上で議論する方法である. 2 つ目は, Lie 環の理論に基づき, 第 2 節で得られた基底の行列表示を用いる方法である.

第 4 節で, associative グラスマン多様体が特異軌道として現れる, グラスマン多様体 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ における G_2-作用による等質超曲面 $\tilde{M}(t)$ $(-1 < t < 1)$ の主曲率を求める. 等質超曲面は余等質性 1 作用の軌道として得られる. A. Kollross は既約コンパクト Riemann 対称空間上の余等質性 1 作用を分類した. その分類により, 余等質性 1 作用の多くは Hermann 作用となることが知られている. そして, それらの作用による等質超曲面の主曲率は, 多くの研究者たちによって既に求められている. グラスマン多様体 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ への G_2-作用は Hermann 作用ではない例外型余等質性 1 の作用である. そこで我々は, Lie 環 $\mathfrak{g}_2$ の不変部分空間分解に着目することで, G_2-作用による $\widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ における等質超曲面の主曲率を計算する. その応用として, austere 部分多様体となる軌道が唯一存在することと, proper 二重調和性をもつ軌道がちょうど 2 つ現れることを示す. さらに, その austere 軌道が弱鏡映部分多様体であることを証明する.

第 5 節では, 6 次元球面のラグランジュ部分多様体から associative グラスマン多様体へのガウス写像のもつ性質について調べる. 6 次元球面のラグランジュ部分多様体の例は数多くの研究者たちによって構成されている. そこで, 6 次元球面へのラグランジュはめ込みと, 対応する associative グラスマン多様体へのガウス写像との関係を研究することは大変意義のあることだと考えられる. 本節ではまず, 6 次元球面のラグランジュ幾何学について詳細に述べる. その後, グラスマン多様体 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ における等位集合 $\tilde{M}(0)$ から 6 次元球面と associative グラスマン多様体へのダブルファイブレーションを構成する. そのダブルファイブレーションを通じて, 6 次元球面のラグランジュ部分多様体と associative グラスマン多様体の幾何学とを関連づける. 特に, ラグランジュはめ込みに対応する associative グラスマン多様体へのガウス写像は調和写像になることを示す. その上で, K. Mashimo が 1985 年に与えた, 例外型 Lie 群 G_2 の閉部分群の軌道として得られる 6 次元球面のコンパクトなラグランジュ部分多様体を具体例として, それらのガウス写像について調べる.

第 6 節で, associative グラスマン多様体の横断的複素部分多様体及び全複素部分多様体の例を与える. 8 種類あるコンパクト対称四元数ケーラー多様体のうち, 四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$, 複素グラスマン多様体 $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ と実グラスマン多様体 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ については, その四元数構造やツイスター空間が具体的に明らかにされていて, その全複素部分多様体の例が構成されている. さらに, 四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$ については, 対称部分多様体となる全複素部分多様体が分類されている. そこで我々は, 第 3 節で具体的に記述した四元数ケーラー構造を用いて, associative グラスマン多様体についての場合を考察する.