論文要約

Representation theory of compact quantum groups based on operator algebras and its application
(作用素環論に基づくコンパクト量子群の表現論とその応用)

北川 めぐみ

1 コンパクト量子群

Banach 環が，C*-条件 $\|T^*T\| = \|T\|^2$ をみたすような $*$-演算 $T \mapsto T^*$ を持つとき，C*-環という．作用素環論において重要な定理のひとつである Gelfand–Naimark の定理によると，可換な単位的 C*-環はあるコンパクト位相空間上の連続関数環と同型になる．このことから，一般の作用素環は "非可換な" コンパクト位相空間上の連続関数環とみなされる．そのような研究対象に "群構造" を与えるのが，Woronowicz によるコンパクト量子群の理論 [5] である．

定義. コンパクト量子群とは，単位的 C*-環 A と，（余積と呼ばれる）単位的 $*$-準同型写像 $\Delta\colon A \to A \otimes A$ の組 (A, Δ) で，以下をみたすもののことである．

1. $(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta$,
2. $(A \otimes 1)\Delta(A) = \{(a \otimes 1)\Delta(b) \mid a, b \in A\}$, $(1 \otimes A)\Delta(A) = \{(1 \otimes a)\Delta(b) \mid a, b \in A\}$ は $A \otimes A$ において稠密である．

例. 通常のコンパクト群 G に対して，$C(G)$ を G 上の複素数値連続関数からなる C*-環とする．このとき，$*$-準同型写像 $\Delta\colon C(G) \to C(G) \otimes C(G)$ を，可換 C*-環 $C(G)$ のテンソル積 $C(G) \otimes C(G)$ は $C(G \times G)$ とみなせることに注意して，以下のように定める．

$$\Delta(f)(g, h) = f(gh) \quad (\forall f \in C(G),\ \forall g, h \in G)$$

すると，$(C(G), \Delta)$ はコンパクト量子群である．可換な環が表すコンパクト量子群はこのような形をしている．

例. 有限群 G に対し，G の群環 $C^*(G) = \mathbb{C}G$ を考える．このとき，$C^*(G)$ 上の余積 Δ を，生成元 δ_t $(t \in G)$ に対して

$$\Delta(\delta_t) = \delta_t \otimes \delta_t$$

によって定めることにより，$C^*(G)$ はコンパクト量子群となる．

例. $0 < |q| \leq 1$ を満たす実数 q に対し，コンパクト量子群 $SU_q(2)$ を以下のように定める．$C(SU_q(2))$ を，α, γ で生成される普遍的な単位的 C*-環とする．生成元 α, γ は以下の条件をみたす．

$$(u^q_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} \alpha & -q\gamma^* \\ \gamma & \alpha^* \end{pmatrix} \text{がユニタリ．}$$

この関係は，以下の等式が成り立つことと同値である．

$$\alpha^*\alpha + \gamma^*\gamma = 1,\ \alpha\alpha^* + q^2\gamma^*\gamma = 1\, \gamma^*\gamma = \gamma\gamma^*,\ \alpha\gamma = q\gamma\alpha,\ \alpha\gamma^* = q\gamma^*\alpha.$$

余積 $\Delta\colon C(SU_q(2)) \to C(SU_q(2)) \otimes C(SU_q(2))$ は以下の式で定める．

$$\Delta(u_{ij}^q) = \sum_k u_{ik}^q \otimes u_{kj}^q$$

生成元 α, γ の像は，

$$\Delta(\alpha) = \alpha \otimes \alpha - q\gamma^* \otimes \gamma,\ \Delta(\gamma) = \gamma \otimes \alpha + \alpha^* \otimes \gamma$$

となる．

特に $q = 1$ のとき，$C(SU_1(2))$ は $C(SU(2))$ と同型である．

2 Kac-Paljutkin の Hopf 環

Hopf 環 $C(G_{\mathrm{KP}})$ は，非可換かつ非余可換な，半単純な Hopf 環の最小の例として Kac と Paljutkin によって導入された [2]. 前節で取り上げたような，通常の群から構成される可換な例（関数環 $C(G)$）や余可換な例（群環 $C^*(G)$）とは異なる例である．

定義． c の Hopf 環 とは，8 次元の単位的 $*$-環

$$C(G_{\mathrm{KP}}) = \mathbb{C} \cdot \epsilon \oplus \mathbb{C} \cdot \alpha \oplus \mathbb{C} \cdot \beta \oplus \mathbb{C} \cdot \gamma \oplus M_2(\mathbb{C}).$$

と余積 Δ の組からなる Hopf $*$-環である．ここで，$\epsilon, \alpha, \beta, \gamma$ はそれぞれ射影を表す．これらの射影と行列 $x \in M_2(\mathbb{C})$ に対し，余積は以下の式で与えられる．

$$\begin{aligned}
\Delta(\epsilon) &= \epsilon \otimes \epsilon + \alpha \otimes \alpha + \beta \otimes \beta + \gamma \otimes \gamma + \frac{1}{2} \sum_{1 \le i,j \le 2} \epsilon_{ij} \otimes \epsilon_{ij}, \\
\Delta(\alpha) &= \epsilon \otimes \alpha + \alpha \otimes \epsilon + \beta \otimes \gamma + \gamma \otimes \beta \\
&\quad + \frac{1}{2}(\epsilon_{11} \otimes \epsilon_{22} + i\epsilon_{12} \otimes \epsilon_{21} - i\epsilon_{21} \otimes \epsilon_{12} + \epsilon_{22} \otimes \epsilon_{11}), \\
\Delta(\beta) &= \epsilon \otimes \beta + \beta \otimes \epsilon + \alpha \otimes \gamma + \gamma \otimes \alpha \\
&\quad + \frac{1}{2}(\epsilon_{11} \otimes \epsilon_{22} - i\epsilon_{12} \otimes \epsilon_{21} + i\epsilon_{21} \otimes \epsilon_{12} + \epsilon_{22} \otimes \epsilon_{11}), \\
\Delta(\gamma) &= \epsilon \otimes \gamma + \gamma \otimes \epsilon + \alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha \\
&\quad + \frac{1}{2}(\epsilon_{11} \otimes \epsilon_{11} - \epsilon_{12} \otimes \epsilon_{12} - \epsilon_{21} \otimes \epsilon_{21} + \epsilon_{22} \otimes \epsilon_{22}), \\
\Delta(x) &= \epsilon \otimes x + \alpha \otimes u_\alpha x u_\alpha^* + \beta \otimes u_\beta x u_\beta^* + \gamma \otimes u_\gamma x u_\gamma^* \\
&\quad + x \otimes \epsilon + \overline{u}_\alpha x \overline{u}_\alpha^* \otimes \alpha + \overline{u}_\beta x \overline{u}_\beta^* \otimes \beta + \overline{u}_\gamma x \overline{u}_\gamma^* \otimes \gamma,
\end{aligned}$$

ただし，ϵ_{ij} は $M_2(\mathbb{C})$ における行列単位を表し，

$$u_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ u_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix},\ u_\gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．

定理． [3] Hopf $*$-環 $C(SU_{-1}(2))$ から $C(G_{\mathrm{KP}})$ への全射な単位的 $*$-準同型写像が存在する．

定理の主張から，$C(G_{\mathrm{KP}})$ が定める量子群 G_{KP} は $SU_{-1}(2)$ の部分量子群と見なすことができる．証明の方針として，Hopf $*$-環の間の準同型写像を構成するために，Hopf 環への群作用から定まる Hopf 環の graded twisting [1] を用いる．また，量子群 G_{KP} の有限次元ユニタリ表現から定める表現圏 $\mathrm{Rep}(G_{\mathrm{KP}})$ は，丹原・山上のテンソル圏 [4] のうち Klein の 4 元群から構成されるもののひとつと圏同値となることを利用する．

参考文献

[1] Julien Bichon, Sergey Neshveyev, and Makoto Yamashita. Twist gradué des catégories et des groupes quantiques par des actions des groupes. *Ann. Inst. Fourier*, 66(6):2299–2338, 2016.

[2] G. I. Kac and V. G. Paljutkin. Finite ring groups. *Trudy Moskov. Mat. Obšč.*, 15:224–261, 1966.

[3] Megumi Kitagawa. Kac-paljutkin quantum group as a quantum subgroup of the quantum $SU(2)$, 2019.

[4] Daisuke Tambara and Shigeru Yamagami. Tensor categories with fusion rules of self-duality for finite abelian groups. *Journal of Algebra*, 209(2):692 – 707, 1998.

[5] S. L. Woronowicz. Compact matrix pseudogroups. *Commun. Math. Phys.*, 111:613–665, 1987.