# 初期宇宙の非平衡過程と密度揺らぎの発生

森川 雅博

お茶の水大学 物理

東京都文京区大塚 2-1-1
電子メール: *HIRO@PHYS.OCHA.AC.JP*

**要旨**

熱場の理論とその拡張を初期宇宙の相転移現象の解明に応用したい．特に，インフレーション相転移を念頭において，非平衡で動的な相転移・量子揺らぎの役割・秩序変数の同定と平均場・その揺らぎ・自由度の古典化などについて議論する．現在の有限温度・有限密度の場の理論だけでは，これらの力学を十分に記述できないので，まず理論形式の拡張から始める．特に，古典的自由度の揺らぎをミクロからどのように同定するかを中心に議論する．この拡張は，初期宇宙に留まらず，原子核の非平衡反応過程や，素粒子の相転移において，揺らぎをミクロから同定するのにも有用だと思う．

## 1　インフレーション相転移

現在観測によって，銀河分布・相関・活動性など様々な宇宙の構造が明らかになってきている．これらの構造は初めからあったものではなく，宇宙がその初期に広い意味の相転移を経て，秩序ができあがっていったものだと考えられている．この構造発生の過程を解明するのが宇宙論の大きな課題である．

特に，初期宇宙のインフレーション相転移 [1] は物質分布の秩序の究極の起源と考えられている．この相転移では，秩序変数とその揺らぎは，宇宙の直接の観測に関係するので，完全に古典的な時間発展を見なければならない．一方，その揺らぎの起源は，インフレーションによって初期揺らぎは完全にならされてしまうので，量子揺らぎに求めるほかない．つまり，この相転移の過程のどこかで量子論的な運動が古典論的な運動に転化しなければならないのである．このように，量子力学・古典力学が共存し，それらが相互転化する系の時間発展が問題になっているわけである．

このような系を記述するのに，現在の有限温度・有限密度の場の理論，特に平衡理論だけでは十分ではない．我々に必要なのは，非平衡な動的相転移を扱うために，量子揺らぎに構造の起源を求めて，古典的な平均場を同定し，その揺らぎを計算し，これが古典的自由度であることを確かめることである．熱場の理論を初期宇宙に応用するにあたって，ここがおもしろいところである．

さらに，このような理論形式はインフレーション相転移だけでなく，WS 相転移・Quark-Hadron 相転移などの宇宙の相転移・原子核の非平衡反応過程などに，強力な方法を提供すると期待される．

## 2 閉じた時間経路経路積分の方法の拡張

通常我々は秩序変数として，その相転移にかかわる場，例えばヒッグス等のスカラー場の真空期待値 $\phi = <\hat{\phi}>$ を考える．そしてこの変数に関して，量子的補正を含めた作用関数つまり有効作用 $\Gamma[\phi]$ を用いて，その定義からすぐ出てくる式

$$\frac{\partial\Gamma[\phi]}{\partial\phi} = -J \tag{1}$$

を，量子補正を考慮した運動方程式だと自然に考える．そして本来，有効作用 $\Gamma[\phi]$ は，場の頂点関数の生成汎関数であり，方程式 (1) は完全に非局所的である．しかし，相転移の動力学が問題になるような自由度の大きいマクロな系では，量子相関の崩壊（デコヒーレンス）のために，有効作用 $\Gamma[\phi]$ は非常に多くの，お互いに量子力学的相関の無い独立な履歴の重ねあわせになっていると期待される．我々がまず第 1 に記述したいのは，このようにお互いに相関の切れた個々の秩序変数の古典的な運動である．さらに，お互いに量子相関の無い独立な履歴の総体は，統計力学的アンサンブルを構成すると考えられる．従って，このアンサンブルは古典的な秩序変数の運動の統計的揺らぎを表現するだろう．これが我々が第 2 に記述したいことである．

従ってこの重ねあわせのために，デコヒーレンスのある系に直接式 (1) を適用しても，個々の独立な履歴を表せない．つまり，$\phi = <\hat{\phi}>$ を秩序変数として採用すると，常に平均量の時間発展しか表さない．かといって，$<\hat{\phi}(\vec{x})\hat{\phi}(\vec{y})>$ などを考えるとこの中には量子・統計揺らぎが混在してしまう． 有効作用に混在しているであろう量子力学的相関と統計的相関を分離するところから我々の作業が始まるはずである．以下では，有効作用 $\Gamma[\phi]$ をどのように分離するかを述べる．

非平行不可逆過程を扱う最も適切な方法は，閉じた時間経路の経路積分法（Keldish-Shwinger 法）であろう [2]．これは特に，物理量の期待値の時間発展を追うのに威力を発揮する．この方法に基づけば，通常の量子補正に加えて，揺動散逸などの統計力学的な反作用も，以下に見るように，整合的に取り込むことができる．分配関数は

$$\begin{aligned} Z[J] &\equiv Tr[T(\exp[i \int_C J\phi])\rho] \\ &= Tr[T_+(\exp[i \int J_+\phi_+])T_-(\exp[-i \int J_-\phi_-])]\rho_0] \end{aligned} \tag{2}$$

で与えられる．ここで，時間積分経路 $C$ は，$-\infty$ から $\infty$ に行って，また $-\infty$ に帰る閉じた経路で，通常の 2 倍になっている．$T$ はこの経路上の時間順序付けのオペレーターで，

$T_+$, $T_-$ はそれぞれ行きと帰りの時間経路上のそれである．この閉じた時間積分経路は，密度行列の時間発展を経路積分表示したときにも自然に現れる．また，$\rho_0$ は初期状態の密度行列である．この分配関数からルジャンドル変換によって，有効作用を求めると

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\equiv \frac{\delta \ln Z/i}{\delta J(x)}, \\ \Gamma[\varphi] &\equiv -i \ln Z[J] - \int_c J\varphi. \end{aligned} \tag{3}$$

となる．この有効作用中の最低次の項を運動量表示で

$$\hat{\Gamma}(k) = \begin{pmatrix} D - iB & i(B-A) \\ i(B+A) & -D+iB \end{pmatrix}. \tag{4}$$

と書く．ここで $A(k), B(k), D(k)$ は独立な実関数である．この段階で素直に変分原理を適用して運動方程式を出すと，(1) になってしまって，量子揺らぎと統計揺らぎの分離ができない．われわれは，有効作用の虚部に着目しよう．この虚部は $\varphi_\Delta(x)$ の偶関数で，

$$\mathrm{Im}\Gamma[\varphi_c, \varphi_\Delta] = \frac{1}{2}\iint \varphi_\Delta(x)B(x-y)\varphi_\Delta(y) + O(\varphi^4). \tag{5}$$

と表わされる．ここで，$\varphi_\Delta \equiv \varphi_+ - \varphi_-$, $\varphi_c \equiv (\varphi_+ + \varphi_-)/2$ である．この項は，閉じた時間経路の経路積分法においてはじめて出現する項で，しかも式 (1) では取りこぼされてしまっていた項である．これに着目して，全体からこの項を分離することを考えよう．そのために，有効作用の虚部を汎関数的にフーリエ変換する．

$$\exp[i\Gamma[\varphi]] = \int [d\xi] P[\xi] \exp[i\mathrm{Re}\Gamma + \int i\xi\varphi_\Delta] \tag{6}$$

ここで，

$$P[\xi] = \exp[-\frac{1}{2}\iint \xi B^{-1}\xi] \tag{7}$$

は補助場 $\xi(x)$ に対する規格化可能な正定値な積分核である．従って，このような積分核を構成する $B$ は，純粋に統計的な情報を持っていると考えられる．もし統計的な揺らぎを量子揺らぎから分離して議論したいのなら，この重み $P[\xi]$ の積分を有効作用から分離してみる．残りの有効作用は純粋に量子的な時間発展を表現していると考えられるので，これに関して変分原理を適用すると，$\varphi_c(x)$ に対する運動方程式は

$$\begin{aligned} -J_C &= \left( \frac{\delta \mathrm{Re}\Gamma + \int \xi\varphi_\Delta}{\delta\varphi_\Delta(x)} \right)_{\varphi_\Delta = 0} \\ &= (\Box + m^2)\varphi_c + V'(\varphi_c) + \int dx' A(x-x')\varphi_c(x') - \xi \end{aligned} \tag{8}$$

となる．これは，非局所 (遅延) 積分核 $A(x-x')$ とランダム力 $\xi(x)$ の項を持つ，一般化されたランジュバン方程式の形になっている．ただし，有効作用を分離したことによって，変数 $\varphi_c(x)$ 自身の定義づけが変わってくる．これについての詳細は文献 [3] を参照．

## 3 宇宙の密度揺らぎの生成と古典化

以上の方法を初期宇宙のインフレーション相転移に応用してみよう．まず，インフレーションが始まり相転移が進行するためには，スカラー場のゼロモード（空間のホライズンを超えた広い範囲でそろった運動）が誘起され，これがゆっくりと運動する必要がある．この集団運動の上に，小さな揺らぎがのっている．この揺らぎは本来量子的で，対応する密度行列の時間発展は

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\eta}\rho(\psi_{\vec{k}+},\psi_{\vec{k}-};\eta) &= \Big[\frac{i}{2}(\partial^2_{\psi+}-\partial^2_{\psi-}) - i\frac{m}{2}\omega^2(\psi^2_{\vec{k}+}-\psi^2_{\vec{k}-}) \\ &- \epsilon(\eta)\psi_\Delta(\partial_{\psi+}-\partial_{\psi-}) - \Lambda(\eta)\psi^2_\Delta\Big]\rho(\psi_{\vec{k}+},\psi_{\vec{k}-};\eta)\end{aligned} \tag{9}$$

で与えられる．ここで，振動数は時間に依存している：

$$\omega^2(\eta) = k^2 - \frac{2}{\eta^2} \qquad (k^2 = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}). \tag{10}$$

また，$\epsilon(\eta)$ と $\Lambda(\eta)$ は場の相互作用から出現する摩擦とランダム力の効果であり，これら散逸効果の時間スケールが場の発展の時間スケールと比べてずっと速いなら積分核はこのように局所的に近似できる．振動数が時間変化するために，場がスクイーズしていき零点振動が拡大される．このマクロになった揺らぎの一部が相互作用のために古典化して統計的な揺らぎをもち，構造を作るのである．上のガウシアンのモデルでは，揺らぎの発展は解析的に解ける．モード $\vec{k}$ の揺らぎがホライズンを離れるときの分散は,

$$\sigma^2_\phi|_{k/a=H} = O(1)\left[Z_0^{-2\epsilon/H}\frac{H^2}{k^3} + \frac{H\Lambda_0}{k^4}\right] \tag{11}$$

となる．ここで，$Z_0^{-2\epsilon/H}$ は摩擦による揺らぎのダンピングの係数で，$\Lambda_0$ は揺らぎの大きさである．自由場のときにあった $k^{-3}$ に比例する項は減衰して，$k^{-4}$ に比例する揺らぎが相互作用によって出現してくる．この揺らぎの古典化の指標を $\mathrm{Tr}\rho^2$ で測ると，これは

$$\mathrm{Tr}\rho^2 = O(1)\frac{Hk^2}{\epsilon\Lambda_0} \tag{12}$$

となり，ホライズンと比べて十分大きな波長の揺らぎは "古典化" する．

## 4 まとめ

相転移によって出現する構造を議論するとき，完全に決定論的に力学を追っていけるとすると，転移後には何も新しい構造は出てこない．このために必要なのは，一番簡単には，非決定論的な発展を促すランダム力である．このランダム力は通常現象論的に導入されるが，ミクロな力学から導出することができる．場の理論の有効作用を，閉じた時間

経路の経路積分で書いておいて，出現する虚部を同定して統計的な重み関数を分離する．この分離された部分を，系にランダム力が働いているように表現することができる．このランダム力の表現は一意的でないが，その統計的性質は有効作用の虚部によって完全に決まっているのだから，どれも統計的に同等だといえる．この方法を初期宇宙のインフレーション相転移に適用すると，転移後に出現する揺らぎの大きさやスペクトルなどを計算することができる．これが有限になるためには場に相互作用が存在しなければならない．さらに，この揺らぎがホライズンスケールを超えたところで“古典化する”事を示すことができる．相互作用が無ければ“古典化”しない．この点において，構造を作る古典統計力学的な揺らぎの生成に関して場の相互作用が基本的であることがわかる．

## 参考文献


[1] A. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology*, Harwood Academic Publisher GmbH, Switzerland (1990) など.

[2] K. Chou, Z. Su, B. Hao, and L. Yu, Phys. Rep. **118**,1 (1985).

[3] M. Morikawa, Prog. Theor. Phys. **93** , 685 (1995).