

弦の場の理論における発展方程式*

お茶の水女子大・理 丸 井 美 保

(1990年4月16日受理)

目 次

第1章	序論
第2章	弦の場の理論
2-1	弦モデルの導入
2-2	第1量子化
2-3	第2量子化
第3章	Altalleri-Parisi 方程式
3-1	部分分子模型
3-2	QCD への部分分子模型の応用
第4章	弦の発展方程式
4-1	発展方程式
4-2	弦の崩壊関数のエネルギー依存性
4-3	遷移確率分布
第5章	弦の遷移確率分布の評価
5-1	遷移確率分布のエネルギースケールの大きな範囲の近似形
5-2	Open String に関する計算
5-3	Closed String に関する計算
5-4	遷移確率分布の近似形の評価
第6章	結論
	謝辞
	参考文献

1章 序 論

String モデル[1,2,3]においては、一般相対性理論における等価原理、又は、ゲージ理論におけるゲージ原理に対応する根本的原理は、まだ確立していない。

しかし、世界面の Reparametrization 不変という要請のみから出発して、自然に多くの対称性を含んだモデルとなっている。この観点から、統一理論に有効なモデルとされ、相対性理論とゲージ理論に基づいて作られる標準モデルを含むものではないかと考えている。

本論文の主題について述べる為に、統一理論の概要にふれる。現在、電磁相互作用 $U(1)_{em}$ と弱い相互作用 $SU(2)_w$ は、Weinberg-Salam モデルとして統一されている。このモデルでは、エネルギースケール(以下 Q と記す)が $\sim 10^2 \text{Gev}$ の段階では、各々の相互作用の結合定数が独立なパラメーターとして扱われている。

これに強い相互作用 $SU(3)_c$ も含めた大統一理論(GUT)が確立されれば、現在知られている力の

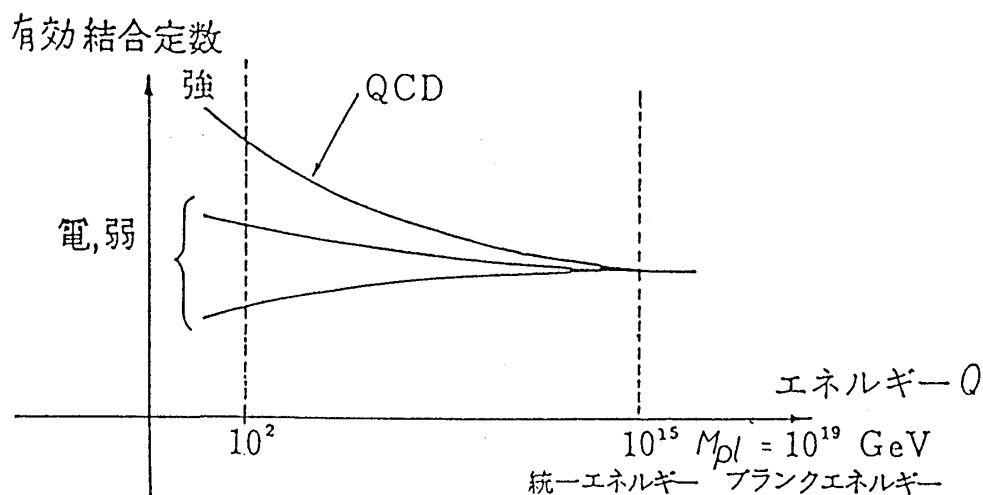
*これは、1990年2月にお茶の水女子大学理学部物理学教室に提出した修士論文です。

うち、内部空間の対称性に由来する相互作用をすべて考慮した理論となる。この強い相互作用をも含んだ3つの力の統一理論の可能性は、くりこみ群を用いて解析されており、図(1.1)に示す様にエネルギースケール $Q \sim 10^{15} \text{ GeV}$ ですべての結合定数が一致するとされている。従って、このエネルギースケールにおいて、1つのゲージ理論に統一されることが、予想される。

更に、時空の共変性に基づいて構成される重力理論をも統一するためには、 Q をプランク質量 $M_{pl} \sim 10^{19} \text{ GeV}$ のオーダーで考えなければならない。String 理論が重力と標準モデルを含んだ4つの力の統一理論であるならば、これが String モデルのエネルギースケールである。

もし、String 理論における物理量の Q^2 依存性を表す式が得られ、 Q^2 を小さくしていくことができれば、素粒子の標準モデルと String モデルのつながりが、明確になってくると思われる。本論文ではこの目的で、String の崩壊関数の Q^2 依存性を示す発展方程式を導入する。

さて、QCD のスケージングの破れにパートンモデルを適用した Altarelli と Parisi の方法は、ハドロン中のクォークの運動量比 z の確率密度 $q(z, Q^2)$ の n 次のモーメント $M_n(Q^2)$ に対してくりこみ群を使った場合と同じ結果を与える。



図(1.1)

String においては、くりこみの概念が不明確で、しかもくりこみ群の方程式は知られていない。上記の発展方程式の導入にはこのくりこみ群方程式によらない Altarelli と Parisi の方法を応用する。

String の崩壊関数に関する発展方程式は、String の3点相互作用のバーテックスを用いて得られ、複雑な形をしており、厳密に解くことは難しい。ここでは、 Q^2 がプランク質量の2乗よりも非常に大きいという近似を用いて、そのふるまいを求め、物理的解釈を与える。

光円錐ゲージを用いて構成される Open String では、3点と4点相互作用を、Closed String では、3点相互作用のみを考えれば散乱振幅の Lorentz 不変性が保たれることが知られている。[4]。

4点相互作用を考慮することは、興味深いことであるが、そのバーテックスは非常に複雑であり、かつ String の結合定数に関して2次のオーダーなので、本論文では、発展方程式を評価する時無視している。

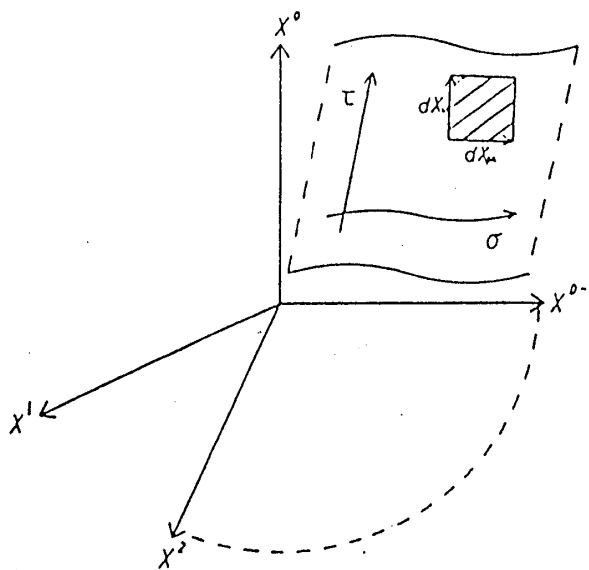
2章 弦の場の理論

2-1 弦模型の作用

1章で述べたように、対称性を含む Action を導入するのが最初の目的である。ここでまず Reparametrization 不変性を満たすようなモデルを設定する。

今、図(2.1)のように D 次元の時空中を時間発展する自由なボソン弦を考える。D 次元時空上に画かれた String の軌跡即ち世界面上の位置を決定するパラメーターを、 $\sigma^a=(\sigma^0, \sigma^1)=(\tau, \sigma)$ ($a=0, 1$) とする。又、この世界面上の 1 点 (τ, σ) を表す位置ベクトルを $X^\mu(\tau, \sigma)$ ($\mu=0 \sim D-1$) とする。

以下、ローマ字の添字 $a, b \dots$ は、パラメーターに対して、ギリシャ文字の添字 $\mu, \nu \dots$ は、時空に対して用いることにする。



図(2.1)

点粒子の作用原理と同様、自由な String の画く世界面の面積は最小であるべきである。このような相対論的要請により導かれる Action が、Nambu-Goto の Action S_{NG} である[5]。

今、 τ, σ の Reparametrization により不変な面積素片を作る $d\Sigma^{\mu\nu}$ を式(2.1.1)のように定義する。

$$\begin{aligned} d\Sigma^{\mu\nu} &= dX^\mu(\tau, \sigma) \wedge dX^\nu(\tau, \sigma) \\ &= (\dot{X}^\mu X'^\nu - X'^\mu \dot{X}^\nu) d\tau d\sigma \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

ここで、 $\dot{X}^\mu = \partial_\tau X^\mu$ 、 $X'^\mu = \partial_\sigma X^\mu$ である。

Action が Lorentz 不変であることと無次元であることを考慮すると(2.1.2)で定義される dA を通して、 S_{NG} は(2.1.3)(2.1.4)のようになる。

$$\begin{aligned} (dA)^2 &= \frac{1}{2} d\Sigma^{\mu\nu} d\Sigma_{\mu\nu} \\ &= |\dot{X}^2 X'^2 - (\dot{X} X')^2| (d\tau d\sigma)^2 \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

$$\begin{aligned}
 S_{NG} &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int dA \\
 &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int \{ \dot{X}^2 X'^2 - (\dot{X} X')^2 \}^{\frac{1}{2}} d\tau d\sigma \quad (2.1.3)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int \sqrt{\det g_{ab}} d\tau d\sigma \quad (2.1.4)$$

α' は $[M^{-2}]$ の次元を持つ定数である。

Action として (2.1.3) を持つ系が特異系 (singular system) であることを見る。

特異系とは余分なゲージ自由度の為、正準運動量に拘束条件が付き、

$H = P_\mu X'^\mu - L = 0$ となる系である。 $X_\mu(\tau, \sigma)$ に関する正準運動量 $P_\mu(\tau, \sigma)$ は (2.1.5) である。

$$\begin{aligned}
 P_\mu(\tau, \sigma) &\equiv -\frac{\partial \tau}{\partial \dot{X}^\mu} \\
 &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{X'^2 \dot{X}_\mu - (\dot{X} X') X'_\mu}{\sqrt{\det g_{ab}}} \quad (2.1.5)
 \end{aligned}$$

便宜上、ここまでは Euclid 空間で計算してきたが、以下は、Minkovsky 空間で考える。(2.1.5) の様な正準共役運動に関して (2.1.6) の拘束条件が確認される。

$$P_\mu P^\mu + \frac{1}{(2\pi\alpha')^2} X'_\mu X'^\mu = 0 \quad (2.1.6.a)$$

$$P_\mu X'^\mu = 0 \quad (2.1.6.b)$$

又、Hamiltonian は (2.1.7) より、恒的に 0 となる。

$$P_\mu \dot{X}^\mu = \frac{1}{2\pi\alpha'} \sqrt{\dot{X}^2 X'^2 - (\dot{X} X')^2} \quad (2.1.7)$$

$$\mathcal{H} = P_\mu \dot{X}^\mu - \mathcal{L} = 0 \quad (2.1.8)$$

以上の内容は、点粒子において相対論的 Action から出発して、Mass Shell 条件が現れるのと同じである。このとき Dirac は Lagrange 乗数を通してこの束縛条件を課す方法で量子化を行った。これを String に応用すると、 S_{NG} と Polyakov Action S_p が等価であることが示される。

今 (2.1.6) の 2 つの拘束条件に対して τ, σ に依存する Lagrange 乗数 $\lambda(\tau, \sigma)$, $\rho(\tau, \sigma)$ を導入すれば (2.1.9) と書ける。

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= P_\mu \dot{X}^\mu - \mathcal{H} \\
 &= P_\mu \dot{X}^\mu + \pi\alpha' \lambda(\tau, \sigma) \left[P^\mu P_\mu - \frac{X'_\mu X'^\mu}{(2\pi\alpha')^2} \right] + \rho(\tau, \sigma) P_\mu X'^\mu \quad (2.1.9)
 \end{aligned}$$

2点関数 $K(x_2, t_2; x_1, t_1)$ は経路積分により、2通りに表現できることを思い出す。

$$K(x_2, t_2; x_1, t_1) \sim \int \mathcal{D}X \mathcal{D}P e^{i \int \mathfrak{L}_1 \alpha^2 \sigma} \sim \int \mathcal{D}X e^{i \int \mathfrak{L}_2 \alpha^2 \sigma} \quad (2.1.10)$$

$$\mathfrak{L}_1 = P_\mu \dot{X}^\mu - \mathcal{H} \quad (2.1.11)$$

ここで、 $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$ は、各々、Lagrangian の1次、2次形式である。(2.1.10)の \mathfrak{L}_1 として(2.1.9)の \mathfrak{L} を採用し、Pに関する経路積分を実行する。

$$K(x_2, t_2; x_1, t_1)$$

$$\begin{aligned} & \sim \int \mathcal{D}X \mathcal{D}P \exp \left\{ i \int d^2 \sigma \left[\pi \alpha' \lambda \left\{ P + \frac{\dot{X} + \rho X'}{2 \pi \alpha' \lambda} \right\}^2 - \frac{1}{4 \pi \alpha' \lambda} (\dot{X} + \rho X')^2 + \frac{\lambda}{4 \pi \alpha'} X'^2 \right] \right\} \\ & = \int \mathcal{D}X \sqrt{\frac{2\pi}{i \pi \alpha' \lambda}} \exp \left\{ i \int d^2 \sigma \frac{-1}{4 \pi \alpha'} \left(\frac{1}{\lambda} \dot{X}^2 + \frac{2\rho}{\lambda} \dot{X} X' + \frac{\rho^2 - \lambda^2}{\lambda} X'^2 \right) \right\} \\ & = \int \mathcal{D}X \sqrt{\frac{2\pi}{i \pi \alpha' \lambda}} \exp \left\{ i \int d^2 \sigma \frac{-1}{4 \pi \alpha'} \eta_{\mu\nu} \sqrt{-g} g^{ab}(\tau, \sigma) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \right\} \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

$\eta_{\mu\nu}, g_{ab}(\tau, \sigma)$ は各々、時空、世界面に関するメトリックであり、以下のように書ける。

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1.13)$$

$$g_{ab}(\tau, \sigma) = \begin{pmatrix} \lambda(\tau, \sigma)^2 - \rho(\tau, \sigma)^2 & \rho(\tau, \sigma) \\ \rho(\tau, \sigma) & -1 \end{pmatrix} \quad (2.1.14)$$

$$g = \det g_{ab} = -\lambda^2 \quad (2.1.15)$$

(2.1.14)は Weyl 不変性を考慮している為、メトリックの自由度が2になり λ, ρ で完全に記述できている。(2.1.10)(2.1.12)より2次微分形式のLagrangianは(2.1.16)であり、これにより与えられる action が Polyakov によるものと一致する。

$$L_2 = \frac{-1}{4 \pi \alpha'} \eta_{\mu\nu} \sqrt{-g} g^{ab}(\tau, \sigma) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \quad (2.1.16)$$

$$S_P = \frac{-1}{4 \pi \alpha'} \int d^2 \sigma \eta_{\mu\nu} \sqrt{-g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \quad (2.1.17)$$

S_N と S_P の等価性は古典的運動方程式が一致することからも推察されるが、量子論的には、上記の方

法で証明した方がよいであろう。以下、 S_P をこのモデルの出発点とする。

この段階で、String モデルの不変性として考えられるものをまとめると、以下の3つである。

- (1) $X_\mu(\tau, \sigma)$ に関する, Poincaré 不変性
- (2) $X_\mu(\tau, \sigma)$, $g_{ab}(\tau, \sigma)$ に関する, Reparametrization 不変性
- (3) $X_\mu(\tau, \sigma)$, $g_{ab}(\tau, \sigma)$ に関する, Weyl 不変性である。

後でみる様に、共形不変性なども(2), (3)の不変性と関係しており、弦の対称性は、非常に高い。

2次元のメトリックは、古典的に3つの自由度をもつが、Reparametrization 不変性(2.1.18)を考えるとこのうち2つがゲージ固定できて、(2.1.19)の様に対角化される。

$$\begin{pmatrix} \tau \\ \sigma \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \tau' \\ \sigma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0(\tau, \sigma) \\ f_1(\tau, \sigma) \end{pmatrix} \quad (2.1.18)$$

$$g_{ab}(\tau, \sigma) = \sqrt{g} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1.19)$$

(2.1.19)を規格直交ゲージ条件とよぶ。

古典的な運動方程式、即ち場 $g_{ab}(\tau, \sigma)$ の運動方程式を考えると、Euler-Lagrange 方程式より(2.1.20)を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_P}{\delta g^{ab}} &= \frac{-1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \eta_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial g^{ab}} (\sqrt{-g} g^{cd}) \partial_c X^\mu \partial_d X^\nu \\ &= \frac{-1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \eta_{\mu\nu} \frac{1}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{1}{2} g_{ab} g^{cd} \partial_c X^\mu \partial_d X^\nu - \partial_a X^\nu \partial_b X^\mu \right\} \\ &\equiv 0 \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

規格直交ゲージ(2.1.19)の下で(2.1.20)を書き下すと(2.1.21)となり(2.1.6)に一致する。

$$\dot{X}_\mu \dot{X}^\mu + X'_\mu X'^\mu = 0 \quad (2.1.21.a)$$

$$\dot{X}^\mu X'_\mu = 0 \quad (2.1.21.b)$$

この意味で、上記の2式は、規格直交拘束条件と呼ばれ、量子化を行う際、重要となる。

ここで σ を String にそってとり、String 上の各点での σ に垂直に τ をとることが出来る。又、 σ のスケールリングは自由であるので、第1量子化では $[0, \pi]$ と決めると便利である。

2-2 第1量子化

点粒子の場合と同様、位置 X^μ 及びその正準運動量 P_μ に関する量子化が、String の第1量子化であるが、これは振動モードに関する Fock 空間を考えることにつながっていく。String の第1量子化については、(1)光円錐ゲージによる形式、(2) Gupta-Bleuler の形式、及び(3) BRST (Becchi-Rouet-Stora-Tyupin)形式がある。(1)の方法で量子化を行い、(2)(3)については概要のみを記す。

(1) 光円錐ゲージによる方法

ここでは Polyakov の Action, (2.1.17) 及び規格直交拘束条件(2.1.21)または, 対角化された g_{ab} (2.1.19) を出発点とする。

S_P を(2.1.19)の様にゲージ固定すると, コバリアントな Action(2.2.1)が得られる。

$$S^{cov} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau \int d\sigma (\dot{X}_\mu \dot{X}^\mu - X'_\mu X'^\mu) \quad (2.2.1)$$

S^{cov} は共形不変性(Conformal Invariance)を持つ。即ち(2.2.2)をみたす f^0 , f^1 を用いた変換のもとで不変である。

$$\begin{aligned} \partial_\tau f^0 &= \partial_\sigma f^1 \\ \partial_\sigma f^0 &= \partial_\tau f^1 \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

これは余分な自由度であり, 量子化の為には, ゲージ固定を行う必要がある。ここでは, 光円錐ゲージ(2.2.3)を用いる。光円錐ゲージとは, τ を(2.2.4)の X^+ の方向にとるゲージである。

$$X^+(\sigma, \tau) = X^+(\tau) = x^+ + 2\alpha' p^+ \tau \quad (2.2.3)$$

(p^+ は重心の運動量)

$$X^\pm = \frac{X^0 \pm X^D}{\sqrt{2}}$$

$$X_\perp = (X^1, X^2, \dots, X^{D-1}) \quad (2.2.4)$$

(2.2.3)の下で, 規格直交拘束条件は, (2.2.5)と書ける。

$$\dot{X}^- = \frac{1}{4\alpha' p^+} [(\dot{X}_\perp)^2 + (X'_\perp)^2] \quad (2.2.5.a)$$

$$X'^- = \frac{1}{2\alpha' p^+} \dot{X}_\perp X'_\perp \quad (2.2.5.b)$$

光円錐ゲージにおける Action S^{lc} は(2.2.6)となる。

$$S^{lc} = \frac{-1}{4\pi\alpha'} \int d\tau \int d\sigma (\dot{X}_\perp^2 - X'^2_\perp) - \frac{1}{2\alpha'} \int d\tau \dot{x}^+ \dot{x}^- \quad (2.2.6)$$

ここで x^μ は重心座標を表す。

$$x^\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi X^\mu d\sigma \quad (2.2.7)$$

String に関する境界条件は, Open String に関しては両端の張力 0 から(2.2.8) Closed String に関しては, 両端の一致から(2.2.9)となる。

$$X'_{\perp}(\tau, \sigma=0) = X'_{\perp}(\tau, \sigma=\pi) \quad (2.2.8)$$

$$X_{\perp}(\tau, \sigma=0) = X_{\perp}(\tau, \sigma=\pi) \quad (2.2.9)$$

(2.2.6)に変分原理を用いると運動方程式が, Open String, Closed String, 両方に対して, (2.2.10)の形で得られる。

$$\ddot{X}_{\perp} - X''_{\perp} = 0 \quad (2.2.10)$$

各々の境界条件の下で解くと, 構成成分 $i=1 \sim D-1$ に関して(2.2.11)(2.2.12)を得る。

$$X_{open}^i(\tau, \sigma) = x^i + 2\alpha' p^i \tau + i \sum_{k \neq 0} \frac{\sqrt{2\alpha'}}{k} a_k^i \cos(k\sigma) e^{-ik\tau} \quad (2.2.11)$$

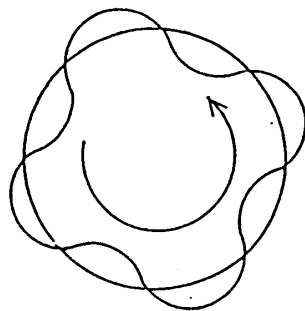
$$X_{closed}^i(\tau, \sigma) = x^i + 2\alpha' p^i \tau + i \sum_{k=0} \frac{\sqrt{2\alpha'}}{2k} (a_k^i e^{-2ik\tau} + \alpha_k^{-i} e^{-2ik\tau}) \quad (2.2.12)$$

ここで

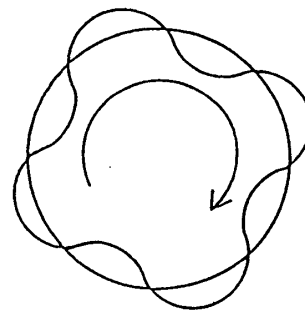
$$\tau_{\pm} = \tau \pm \sigma \quad (2.2.13)$$

(2.2.10)は調和振動子の運動方程式であり, この意味で(2.2.11), (2.2.12)を固有モード展開という。

Closed String において $\exp(-2iK\tau_-)$ と $\exp(-2iK\tau_+)$ は, 図(2.2.a)及び図(2.2.b)の様に同じ節数の逆回りのモードの関係にあり, 左回り, 右回りと呼ばれ, 互いに独立である。



図(2.2.a)



図(2.2.b)

次に, 正準運動量 P_{μ} を, (2.2.14)で定義する。

$$\begin{aligned} P_{\mu}(\tau, \sigma) &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^{\mu}} \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}_{\mu}(\tau, \sigma) \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

このモード展開は

$$P_{open}^i(\tau, \sigma) = \frac{1}{\pi} p^i + \frac{1}{\pi\sqrt{2\alpha'}} \sum_{k \neq 0} \alpha_k^i \cos(k\sigma) e^{-ik\tau} \quad (2.2.15)$$

$$P_{closed}^i(\tau, \sigma) = \frac{1}{\pi} p^i + \frac{1}{\pi\sqrt{2\alpha'}} \sum_{k \neq 0} (\alpha_k^i e^{-2ik\tau} + \tilde{\alpha}_k^i e^{-2ik\tau}) \quad (2.2.16)$$

String の第 1 量子化のため、世界面に関する同時刻交換関係を以下のように設定する。

$$[X^i(\tau, \sigma), P^j(\tau, \sigma')] = i\delta^{ij} \delta(\sigma - \sigma') \quad (2.2.17)$$

$$[X^i(\tau, \sigma), X^j(\tau, \sigma')] = [P^i(\tau, \sigma), P^j(\tau, \sigma')] = 0 \quad (2.2.18)$$

これらより、 α_k^i に関する交換関係(2.2.19)が要求される。

$$[\alpha_k^i, \alpha_{k'}^j] = [\tilde{\alpha}_k^i, \tilde{\alpha}_{k'}^j] = k\delta^{ij} \delta_{k+k', 0} \quad (2.2.19)$$

ここで、 $\alpha_k^{i+}(\tilde{\alpha}_k^{i+})$, $\alpha_k^i(\tilde{\alpha}_k^i)$ を以下のように定義する。これらは各モード(方向 k モード)の生成, 消滅演算子と解釈される。

又、 α_{-k}^i , α_k^i を各々 Excitation, Decitation 演算子と呼ぶ。

$$\begin{aligned} \alpha_k^{i+} &\equiv \frac{\alpha_{-k}^i}{\sqrt{k}}, & \alpha_k^i &\equiv \frac{\alpha_k^i}{\sqrt{k}} \\ \tilde{\alpha}_k^{i+} &\equiv \frac{\tilde{\alpha}_{-k}^i}{\sqrt{k}}, & \tilde{\alpha}_k^i &\equiv \frac{\tilde{\alpha}_k^i}{\sqrt{k}} \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

X^+ に対する共役運動量 p^- がエネルギーに相当する。これを計算するため、 $P^-(\tau, \sigma)$ を規格直交条件のひとつ(2.2.5.b)を用いて表す。

$$\begin{aligned} P^-(\tau, \sigma) &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^-(\tau, \sigma) \\ &= \frac{1}{8\pi\alpha'^2 p^+} \{(\dot{X}_\perp)^2 + (X'_\perp)^2\} \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

$$= \frac{1}{8\pi\alpha'^2 p^+} : (\dot{X}_\perp)^2 + (X'_\perp)^2 : + c \quad (2.2.22)$$

C は Open String, Closed String 各々に対して決まる C 数である。

ここで(2.2.21)に固有モード展開形式(2.2.11), (2.2.12)を用い、 p^- を求める。

$$p^- = \int_0^\pi d\sigma P^-(\tau, \sigma)$$

$$\left\{ \begin{aligned} &= \frac{1}{2p^+} \left[p_{\perp}^2 + \frac{1}{\alpha'} \sum_{k>0} \left\{ \sum_{i=1}^{D-2} \alpha_{-k}^i \alpha_k^i + \frac{D-2}{2} k \right\} \right] && \text{(for open)} && (2.2.23) \\ &= \frac{1}{2p^+} \left[p_{\perp}^2 + \frac{1}{\alpha'} \sum_{k>0} \left\{ \sum_{i=1}^{D-2} (\alpha_{-k}^i \alpha_k^i + \tilde{\alpha}_{-k}^i \tilde{\alpha}_k^i) + 2 \frac{D-2}{2} k \right\} \right] && \text{(for closed)} && (2.2.24) \end{aligned} \right.$$

(2.2.23), (2.2.24)の第2項は, $P-(\tau, \sigma)$ における C から来るもので, 正規積をとった残りの部分, 即ち 0点エネルギーである。又, String の質量は, 次のように定義される。

$$\begin{aligned} m_{open}^2 &= P_{open}^2 \\ &= \frac{1}{\alpha'} \sum_{k>0} \left\{ \alpha_{-k}^i \alpha_k^i + \frac{D-2}{2} k \right\} \\ &= \frac{1}{\alpha'} \left\{ \sum_{k>0} \alpha_{-k}^i \alpha_k^i - 1 \right\} \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

$$\begin{aligned} m_{closed}^2 &= p_{closed}^2 \\ &= \frac{1}{\alpha'} \sum_{k>0} \{ (\alpha_{-k}^i \alpha_k^i + \tilde{\alpha}_{-k}^i \tilde{\alpha}_k^i) + (D-2)k \} \\ &= \frac{1}{\alpha'} \{ \sum_{k>0} (\alpha_{-k}^i \alpha_k^i + \tilde{\alpha}_{-k}^i \tilde{\alpha}_k^i) - 2 \} \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

光円錐ゲージの下で, 時空の Lorentz 不変性を要請すると, 臨界次元 D の値26, open String, Closed String 各々の零点エネルギー 1, 2 が決まる。

又, 便宜上, 以下の N_k, \tilde{N}_k を定義しておく。

$$N_k \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{-k}^i \alpha_k^i = \sum_{i=1}^{\infty} k \alpha_{-k}^i \alpha_k^i \quad (2.2.27)$$

$$\tilde{N}_k \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-k}^i \tilde{\alpha}_k^i = \sum_{i=1}^{\infty} k \tilde{\alpha}_{-k}^i \tilde{\alpha}_k^i$$

規格直交拘束条件の一つ(2.2.5.a)は重心に関する Einstein の関係式を含んでいた。

(2.2.5.a)と残りの一つ(2.2.5.b)を使うと更に, 縦成分 X^- のモードを従属変数として扱うこと, 即ちその振動モードをおとすことが出来ることも示される。

この様に, 光円錐ゲージによる形式は, Lorentz 不変性は明確でなくなるが, 物理的状態のみで議論が出来るという利点がある。

(2) Gupta-Bleuler の形式

規格直交拘束条件(2.2.5)を直接用いるかわりにその Fourier 展開の係数である Virasoro 演算子(2.2.28), (2.2.30)を用いる。この拘束条件を(2.2.29), (2.2.31)の様に, 物理的状態 $|\phi\rangle$ に課すことで, action にゴースト項即ち負のメトリックをもつ物理的でない場を含むことを許し, 共変性を保つようにとったものである。

Open String の場合

$$\text{open} \quad L_n = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} : \alpha_{n-m} \alpha_m : \quad (2.2.28)$$

$$\begin{aligned} L_n|\phi\rangle &= 0 & n \geq 1 \\ (L_0 - 1)|\phi\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

Closed String の場合

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} : \alpha_{n-m} \alpha_m : \\ \tilde{L}_n &= \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} : \tilde{\alpha}_{n-m} \alpha_m : \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

$$\begin{aligned} L_n|\phi\rangle &= 0 & n \geq 1 \\ \tilde{L}_n|\phi\rangle &= 0 & n \geq 1 \\ (L_0 - \tilde{L}_0)|\phi\rangle &= 0 \\ (L_0 + \tilde{L}_0 - 2)|\phi\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

(3) BRST の形式

これは、系に(1), (2)の利点であるユニタリティーと共変性を同時に与えるため、Faddeev-Popov ゴーストを導入し、Virasoro 代数を変形した新しい対称性を考えて量子化を行うものである。ここで第1量子化の各量の次元を質量単位系でまとめておく。

パラメーター; τ, σ	$[M^0]$
時空ベクトル; $X_\mu(\tau, \sigma)$	$[M^{-1}]$
正準運動量 ; $P_\mu(\tau, \sigma)$	$[M]$
Action; S	$[M^0]$
Excitation, ; $\alpha^i_{-n}, (\tilde{\alpha}^i_{-n})$	
Decitation 演算子; $\alpha^i_\kappa, (\tilde{\alpha}^i_\kappa)$	$[M^0]$
$L_N(\tilde{L}_N), N_\kappa(\tilde{N}_\kappa);$	$[M^0]$
$\alpha;$	$[N^{-2}]$

2-3 第2量子化

ここでは、第2量子化によるStringの場について考えたのち、Lagrangian, 交換関係等を導入し、伝搬関係数及びバーテックス演算子が振動子表示できることを確認する。

通常の場合の理論と同様に、第2量子化では、無限個の自由度を持つ場を考える事になる。

String にえて、この場 Φ は(2.3.1)で定義される汎関数(functional)であり、Stringの配置(configuration)に依存する[4]。

$$\Phi[X_\mu(\sigma, \tau)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \Phi[X_\mu(\sigma_0, \tau), X_\mu(\sigma_1, \tau), \dots, X_\mu(\sigma_N, \tau)] \quad (2.3.1)$$

σ はStringにそった連続パラメーターであるが、これを N 等分する点を $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_N$ とした。この時、 ϕ に対する正準共役運動量 Π は、一般に(2.3.2)で定義される。

$$\Pi[X_\mu(\sigma, \tau)] = \delta L / \delta(\partial \Phi[X_\mu(\sigma, \tau)] / \partial X_0(\sigma)) \quad (2.3.2)$$

Covariant 形式による量子化であると、 $X(\sigma)$ はStringにそって定義される無限個の時間であり、 Φ と Π に1対1の対応が見つからないという技術的困難が生じる。しかし、我々が採用した光円錐ゲージ

による方法では、 Φ の時間微分は

$X^+ = x^+ + 2\alpha' p^+ \tau$ による微分であり、(2.3.3)で Π が定義され、一意的に決まる。

$$\Pi[X_\mu(\sigma), \tau] = \delta L / \delta(\partial \Phi[X_\mu(\sigma), \tau] / \partial X^+) \quad (2.3.3)$$

今まで、 $X^+ = x^+ + 2\alpha' p^+ \tau$ とゲージ固定し、 σ に関しては $[0, \pi]$ で考えてきた。光円錐座標系における第2量子化では、次のように考え直すと便利である。

まず、無次元量 $2\sqrt{\alpha'} p^+$ を σ におしつけて新しいパラメーター $\sigma' \tau'$ を導入する。ここで $\alpha \equiv 2p^+$ とする。

$$\begin{aligned} \sigma' &= \sqrt{\alpha'} \alpha \sigma \\ 0 \leq \sigma' &\leq \pi \sqrt{\alpha'} \sigma \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

以上より α は、String の長さに対応する量となる。

次に、 τ を時刻 X^+ に一致させる。

$$X^+ = \tau \quad (2.3.5)$$

(2.3.4), (2.3.5)における τ' , σ' を改めて τ , σ とすると、各量の次元は以下のようにになる。

時刻; $X^+ = \tau [M^{-1}]$

変数; $\sigma [M^0]$

σ' , 0モードの運動量 p^\perp , p^+ , p^- , 及び位置ベクトル X^\perp , X^+ , X^- の次元は第1量子化の場合と変わらない。

さて、光円錐ゲージをとっている今、場 $\Phi[X_\mu(\sigma)]$ は $\Phi[X^\perp, X^-, \tau]$ である。ここで、 x^- に関する Fourier 変換を行う。 ϕ は複素場として扱う。

$$\Phi_\alpha[X^\perp(\sigma), \tau] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha' \{ \Phi[X^\perp(\sigma), x^-, \tau] e^{-\alpha' p^+} + \Phi^+[X^\perp(\sigma), x^-, \tau] e^{i\alpha' p^+} \} \quad (2.3.6)$$

この Φ_α に関する Schrodinger 方程式を考える。(2.2.25), (2.2.26)の質量に関する式で、 $m^2 = M/\alpha'$ とおくと、Open String, Closed String とともにエネルギー p^- に関して(2.3.7)と書ける。

$$p^- = \frac{1}{\alpha'} [p_\perp^2 + M/\alpha'] \quad (2.3.7)$$

(2.3.6), (2.3.7)より(2.3.8)となり、これは $p^- = i \frac{\partial}{\partial X^+}$ のおきかえにより(2.3.9)となる。

$$p^- \Phi_\alpha[X_\perp(\sigma), \tau] = \frac{1}{\alpha'} [p_\perp^2 + M/\alpha'] \Phi_\alpha[X_\perp(\sigma), \tau] \quad (2.3.8)$$

$$[i\alpha\alpha' \frac{\partial}{\partial X^+} - H_0] \Phi_\alpha[X_\perp(\sigma), \tau] = 0 \quad (2.3.9)$$

但し, H_0 は(2.3.10)の無次元量である。

$$H_0 = \alpha' p_\perp^2 + M \quad (2.3.10)$$

(2.3.9)が, String の Schrodinger 方程式である。

ここで Euler-Lagrange 方程式が Schrodinger 方程式(2.3.9)を与えるように自由な場の Lagrangian L_0 を決める。

$$L_0 = \int \mathcal{D}X_\perp d_\alpha \frac{1}{2} \Phi_\alpha^+[X_\perp(\sigma), \tau] [i\alpha\alpha' \frac{\partial}{\partial X^+} - H_0] \Phi_\alpha[X_\perp(\sigma), \tau] \quad (2.3.11)$$

L_0 から共役運動量 Π を定義し, 第2量子化の為, Φ と Π に関する同時刻交換関係を設定する。

$$\begin{aligned} [\Phi_\alpha(X_\perp(\sigma), \tau), \Pi_\beta(Y_\perp(\sigma), \tau)] &= i\delta[\alpha-\beta] \prod_\sigma \delta[X_\perp(\sigma) - Y_\perp(\sigma)] \\ \Pi_\alpha(X_\perp(\sigma), \tau) &= \delta L_0 / \delta \dot{\Phi}(X_\perp(\sigma), \tau) = \frac{i\alpha\alpha'}{2} \Phi_\alpha^+[X_\perp(\sigma), \tau] \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

ここで, $\dot{\Phi} = \partial / \partial X^+ \Phi$ である。

以上より, (2.3.14)を得る。

$$[\Phi_\alpha(X_\perp(\sigma), \tau), \Phi_\alpha^+(Y_\perp(\sigma), \tau)] = \frac{2}{\alpha\alpha'} \delta[\alpha-\beta] \prod_\sigma \delta[X_\perp(\sigma) - Y_\perp(\sigma)] \quad (2.3.14)$$

ここで, $\Phi_\alpha^+[X_\perp(\sigma), \tau]$, $\Phi_\alpha[X_\perp(\sigma), \tau]$ は, 各々時刻 τ で配置(Configuration) $X_\perp(\sigma)$ を持つ String の生成消滅演算子であると言える。振動モードに関する Fock 空間を $1 \gg$ で表すのに対して, String そのものの Fock 空間は $1 \gg$ で表す。また, 共役場 ϕ' に関して, $\alpha > 0$ とおけば(2.3.15)は明らかである。

$$\Phi_\alpha^+[X_\perp(\sigma), \tau] = \Phi_{-\alpha}[X_\perp(\sigma), \tau] \quad (2.3.15)$$

次に, ある String が時刻 τ で配置 X であり, 時刻 τ_2 で配置 Y となるような伝搬関数を考えると, 点粒子と同じく(2.3.16)で定義できる。

$$\langle Y, \tau_2 | X, \tau_1 \rangle = \langle\langle 0 | T(\Phi_\beta(Y_\perp, \tau_2) \Phi_\alpha^+(X_\perp, \tau_1)) | 0 \rangle\rangle \quad (2.3.16)$$

ここで, 左辺について考える。第1量子化の Hamiltonian H と Lagrangian L に関するオペレーター形式(Operator Formalism)と経路積分形式(Path Integral Formalism)の関係は, (2.3.17)と書ける。

$$\langle X_2 | e^{-i(\tau_2 - \tau_1)H} | X_1 \rangle = \int \mathcal{D}X e^{iS} \delta[X(\tau_1) - X_1] \delta[X(\tau_2) - X_2] \quad (2.3.17)$$

ここで、 δ 関数は、始状態、終状態の配置を決める為のものである。

ここでは、Action として(2.2.6)の S^{lc} を採用する。前述の τ, σ に関するおきかえ(2.3.4), (2.3.5)を考慮すると、(2.3.16)の左辺は以下ようになる。

$$\begin{aligned}
 \langle X_2 | e^{-i(\tau_2 - \tau_1)H} | X_1 \rangle & \\
 &= \int \mathcal{D}X_{\perp} \mathcal{D}x^{-} \exp \left\{ \frac{-i}{2\pi} \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^{\pi\alpha} d\sigma (\dot{X}_{\perp}^2 - \dot{X}'_{\perp}{}^2) - \frac{i}{\sqrt{2\alpha'}} \int_{\tau_1}^{\tau_2} dt x^{+} \dot{x}^{-} \right\} \\
 &\quad \times \delta[X(\tau_1) - X_1] \delta[X(\tau_2) - X_2] \\
 &= \delta[\alpha - \beta] \int \mathcal{D}X_{\perp} \exp \left\{ -i/2\pi \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^{\pi\alpha} d\sigma (\dot{X}_{\perp}^2 - \dot{X}'_{\perp}{}^2) \right\} \\
 &\quad \times \prod_{\sigma} \delta[X_{\perp}(\sigma, \tau_1) - X_{\perp 1}(\sigma)] \prod_{\sigma} \delta[X_{\perp}(\sigma, \tau_2) - X_{\perp 2}(\sigma)] \tag{2.3.18}
 \end{aligned}$$

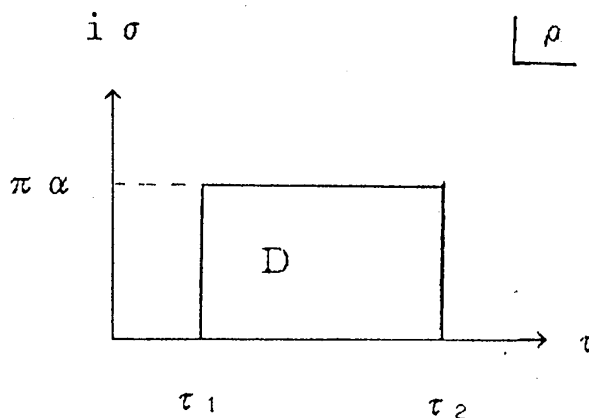
ここで、重心に関する運動量保存則を表す $\delta[\alpha - \beta]$ は、String の長さが変わらないことを意味する。

時刻 τ_1, τ_2 における運動量を P_1, P_2 とする。(2.3.19)を用いて伝搬関数を運動量表示すると(2.3.20)となる。

$$\langle P_{\perp} | X_{\perp} \rangle = \exp \left\{ i \int_0^{\pi\alpha} d\sigma P_{\perp}(\sigma) X_{\perp}(\sigma) \right\} \tag{2.3.19}$$

$$\begin{aligned}
 \langle P_2, \tau_2 | P_1, \tau_1 \rangle & \\
 &= \sum_{X_1, X_2} \langle P_2, \tau_2 | X_2, \tau_2 \rangle \langle X_2, \tau_2 | X_1, \tau_1 \rangle \langle X_1, \tau_1 | P_1, \tau_1 \rangle \tag{2.3.20}
 \end{aligned}$$

Wick Rotation をほどこして、図(2.3)の様な複素平面 ρ を考える。



図(2.3)

時刻 τ_1 から τ_2 までの間に、自由な String が画く世界面は長方形の領域 D で表せる。この領域の境界を ∂D と記す。このとき、 $P_1(\sigma)$ は $\tau = \tau_1$ の境界から入ってくる運動量分布、 $P_2(\sigma)$ は $\tau = \tau_2$ の境界から出ていく運動量分布と考えられる。このとき、(2.3.20)は(2.3.21)と書き直せる。

$$\langle P_2, \tau_2 | P_1, \tau_1 \rangle = \delta[\alpha - \beta] \int \mathcal{D}X_{\perp} \exp\{-1/2\pi \int_D d\tau d\sigma (X_{\perp}^2 + X'^2) + \int_{\partial D} d\rho P_{\perp} X_{\perp}\} \quad (2.3.21)$$

ここで、Open String を例にとって話をすすめる。平方完成して経路積分を実行するため、(2.3.22) ~ (2.3.24) のように Neumann 関数を導入し、変数変換を行う。この結果、(2.3.25) を得る。

$$X_{\perp}(\rho) = \tilde{X}_{\perp}(\rho) - \int N(\rho, \rho') P(\rho') d\rho' \quad (2.3.22)$$

$$(\partial_{\tau}^2 + \partial_{\sigma}^2) N(\rho, \rho') = \pi \delta^{(2)}(\rho - \rho') \quad (2.3.23)$$

$$\partial_{\sigma} N(\rho, \rho')|_{\text{境界}} = \partial_{\sigma} N(\rho, \rho')|_{\text{境界}} = 0 \quad (2.3.24)$$

$$\langle P^2, \tau^2 | P_1, \tau_1 \rangle = \delta[\alpha - \beta] C_D \exp\left[\frac{1}{2} \int d\rho f d\rho' P(\rho) N_D(\rho, \rho') P(\rho')\right] \quad (2.3.25)$$

C_D は領域に依存する定数、 N_D は D に依存する Neumann 関数である。

ここで、(2.3.26) で定義される Decitation 演算子 α_n^{\dagger} の固有状態であるコヒーレント状態 $|\xi\rangle$ を考える [3]。

$$|\xi\rangle \equiv \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{-n} \xi_n}{n}\right] |0\rangle \quad (2.3.26)$$

この $|\xi\rangle$ について (2.3.27), (2.3.28), (2.3.29) が成り立つ。

$$\langle P | \xi \rangle = \exp\left[-\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2n} (\xi_n^2 + p_n^2) - \xi_n P_n \sqrt{2/n} \right\}\right] \quad (2.3.27)$$

$$\alpha_n | \xi \rangle = \xi_n | \xi \rangle \quad (2.3.28)$$

$$\langle \bar{\xi} | \alpha_{-n} = \langle \bar{\xi} | \bar{\xi}_n \quad (2.3.29)$$

ここで、 $P_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{n}} (\alpha_{-n} + \alpha_n)$, ($n \geq 0$) である。伝搬関数は、以下の様になる。

$$\begin{aligned} & \langle \bar{\xi}^{(2)}, \tau_2 | \xi^{(1)}, \tau_1 \rangle \\ &= \sum_{P_1, P_2} \langle \bar{\xi}^{(2)}, \tau_2 | P_2, \tau_2 \rangle \langle P_2, \tau_2 | P_1, \tau_1 \rangle \langle P_1, \tau_1 | \xi^{(1)}, \tau_1 \rangle \end{aligned} \quad (2.3.30)$$

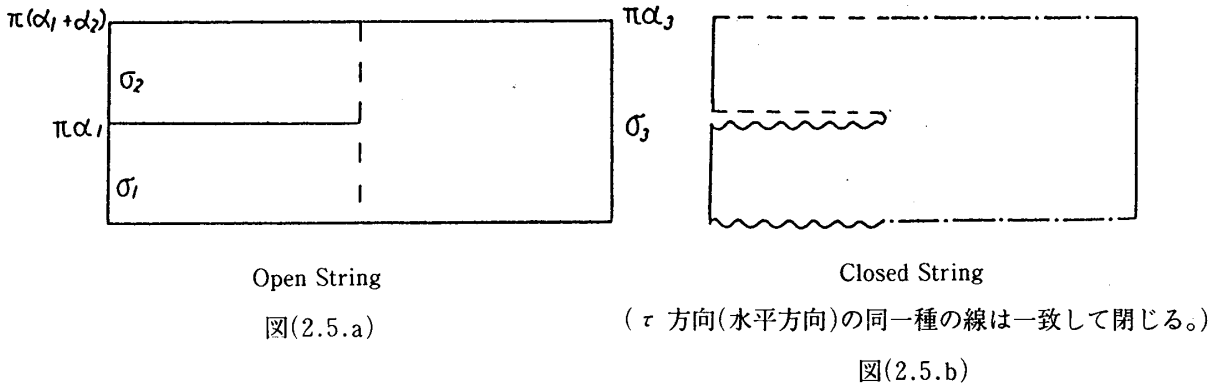
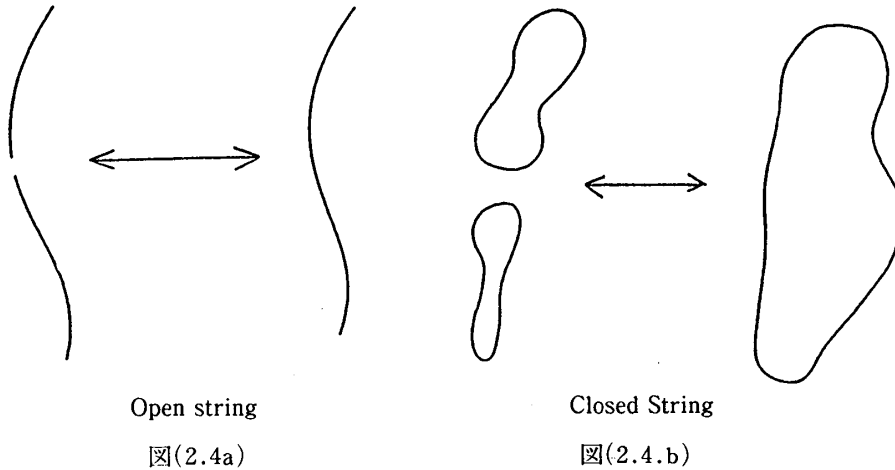
この右辺は、適当な関数 $F(|\xi_k^{(1)}\rangle, |\xi_k^{(2)}\rangle, \tau_1, \tau_2)$ で表せることは、(2.3.27) より明らかである。

更に、(2.3.28, 29) を考慮すると、 $\{\bar{\xi}_k^{\dagger}, |\xi_k^{\dagger}\rangle$ は、各々 $|\alpha_{-k}\rangle, |\alpha_k\rangle$ に置き換えることができ、(2.3.31) と書ける。

$$F(\{\alpha_{-k}^{i(1)}\}, \{\alpha_k^{i(2)}\}, \tau_1, \tau_2) = C \times \exp\left\{ \sum_{r,s=1}^2 \frac{1}{2} \alpha_k^{(r)} \bar{N}_{-kl}^{(2)}(\tau_1, \tau_2) \alpha_{-l}^{(s)} \right\} \quad (2.3.31)$$

ここで、 $\bar{N}_{kl}^{(2)}$ は Neumann 関数の係数、 C は任意定数である。

次に、3点相互作用のバーテックス 即ち 図(2.4)のように1本のStringが2本に分かれる場合、及びその逆の場合を考える。これは、図(2.5)のように ρ 平面($p = \tau + i\sigma$)で考えると便利である。



図(2.5)を表すバーテックス演算子を $|V^{(3)}\rangle$ と書く。

$|V^{(3)}\rangle$ に関する世界面の連続条件は(2.3.32)、運動量保存の条件は(2.3.33)と書ける。

$$[X_3(\sigma) - \theta_1 X_1(\sigma) - \theta_2 X_2(\sigma)] |V^{(3)}\rangle = 0 \quad (2.3.32)$$

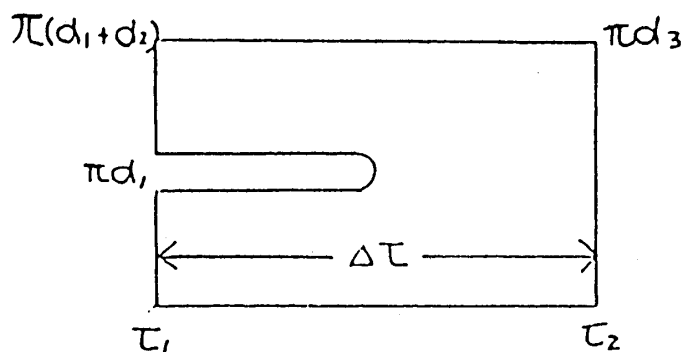
$$[P_3(\sigma) - \theta_1 P_1(\sigma) - \theta_2 P_2(\sigma)] |V^{(3)}\rangle = 0 \quad (2.3.33)$$

ここで階段関数 θ_1, θ_2 は(2.3.34), (2.3.35)で与えられる。

$$\theta_1 = \begin{cases} 1 & (0 \leq \sigma \leq \pi\alpha_1 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases} \quad (2.3.34)$$

$$\theta_2 = \begin{cases} 1 & (\pi\alpha_1 \leq \sigma \leq \pi(\alpha_1 + \alpha_2) \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases} \quad (2.3.35)$$

(2.3.32)(2.3.33)の条件を与えれば、この3点相互作用のバーテックスは図(2.6)の形をもつ伝搬関数を τ 方向に縮めた極限($\Delta\tau \rightarrow 0$)であるとみとすることができる。従って(2.3.21)の極限として



Closed String

(この領域を Δ とする。)

図(2.6)

$|V^{(3)}\rangle$ は次のように書くことができる。

$$|V^{(3)}\rangle = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \int \mathcal{D}X_{\perp} \exp\left\{ \frac{-1}{2\pi} \int d\tau d\sigma (\dot{X}_{\perp}^2 + X'_{\perp}{}^2) + \int_{\partial\Delta} d\rho P_{\perp} X_{\perp} \right\} \quad (2.3.36)$$

以上より、3点相互作用が振動子表示出来ることはわかる。

光円錐ゲージにおける3点相互作用の振動子表示の陽な形は、Mandelstam, Cremmer-Gervais, Kaku-Kikkawaによって与えられた。我々は、通常用いられるGreen-Schwarzによる表示を用いる[7]。

$$|V_{open}\rangle = \exp\left\{ \sum_{r,s=1}^3 \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{1}{2} \alpha_{-k}^{(r)} \bar{N}_{kl}^{rs} \alpha_{-l}^{(s)} + \mathbf{p} \sum_{r=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \bar{N}_k^r \alpha_{-k}^{(r)} - \frac{\gamma_0}{2} \left(\frac{\mathbf{p}^2}{\alpha} + 2 \sum_{r=1}^3 \frac{1}{\alpha_r} \right) \right\} |0\rangle \quad (2.3.37)$$

$$|V_{closed}\rangle = \exp\left\{ \sum_{r,s=1}^3 \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{1}{2} (\alpha_{-k}^{(r)} \bar{N}_{kl}^{rs} \alpha_{-l}^{(s)} + \tilde{\alpha}_{-k}^{(r)} \bar{N}_{kl}^{rs} \tilde{\alpha}_{-l}^{(s)}) + \frac{1}{2} \mathbf{p} \sum_{r=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \bar{N}_k^r (\alpha_{-k}^{(r)} + \tilde{\alpha}_{-k}^{(r)}) - \frac{\tau_0}{4} \left(\frac{\mathbf{p}^2}{\alpha} + 8 \sum_{k=1}^3 \frac{1}{\alpha_k} \right) \right\} |0\rangle \quad (2.3.38)$$

ここで

$$\bar{N}_{kl}^{rs} = -\frac{k l \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{l d_r + k d_s} \bar{N}_k^r \bar{N}_l^s \quad (2.3.39)$$

$$\bar{N}_k^r = \frac{1}{\alpha_r} f_k\left(\frac{-\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right) e^{R\tau_0/\alpha_r} \quad (2.3.40)$$

$$f_k(\gamma) = \frac{1}{k!} (k\gamma-1)(k\gamma-2)\cdots(k\gamma-k+1) \quad (2.3.41)$$

$$\tau_0 = \sum_{r=1}^3 \alpha_r \ln |\alpha_r| \quad (2.3.42)$$

$$\mathbf{p} = \alpha_1 p_2^+ - \alpha_2 p_1^+ \quad (2.3.43)$$

$$\alpha_r = 2p_r^+ \quad (2.3.44)$$

$$\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \quad (2.3.45)$$

である。

第3章で見るように、Altarelli と Parisi は3点の相互作用を考えたときの微分散乱断面積を相互作用表示を用いた古典的形式の摂動論(Old fashioned perturbation theory)で計算している。

この方法を応用するためには、光円錐座標系において3点相互作用をするStringの古典的な摂動の規則を明らかにしておく必要がある。

点粒子について相互作用表示を用いることで、この規則を作り、これをStringに拡張すると以下を得る[8]。

散乱行列に関する古典的(非共変的)の摂動の規則

(光円錐座標系において3点相互作用をするStringの場合)

(1) 始状態 i , 終状態 f (外線)

$$\prod_{j \in i, f} \sqrt{(2\pi)^{D-1} 2 |p_j^+|}$$

(2) バーテックス

$$(2\pi)^{D-1} \delta^{(1)}\left(\sum_{r=1}^3 p_r^+\right) \delta^{(D-2)}\left(\sum_{r=1}^3 p_r^+\right) \lambda$$

ここで

$$\lambda = g \langle \{n_k^i, (\tilde{n}_k^i)\}^{(1)}, \{n_k^i, (\tilde{n}_k^i)\}^{(2)}, \{n_k^i, (\tilde{n}_k^i)\}^{(3)} | V^{(3)} \rangle$$

g はStringの結合定数

(3) 中間状態 n (内線)

$$\int dp^+ d^{D-2} p^\perp \frac{1}{(2\pi)^{D-1} 2 |p^+|} \frac{1}{E_i - E_n + i\epsilon}$$

$$E_n = \sum_{j \in n} \frac{1}{2 |p_j^+|} [(p_j^+)^2 + m^2]$$

E_i は始状態のエネルギー

E_n は中間状態のエネルギー

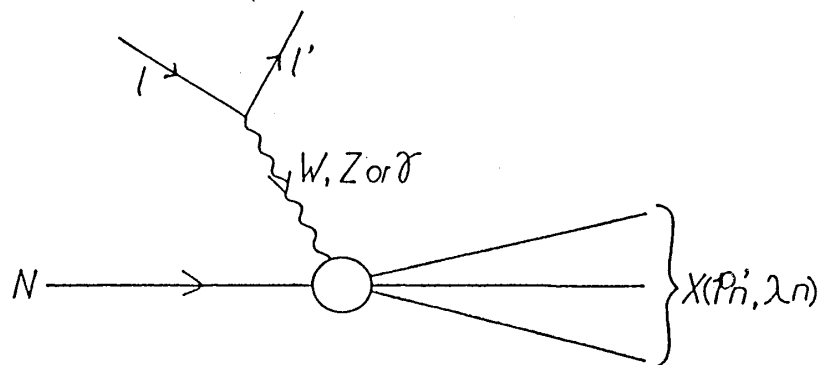
5章では、(2.3.37), (2.3.38)のバーテックスと、上記の摂動の規則を用いてStringにおける崩壊関数について議論を行う。

3章 Altarelli Parisi 方程式

3-1 部分子模型

1969年に提唱された Bjorken スケーリング[9]という現象を記述するため、Feynman が1972年に部分子模型(パートンモデル)を導入した[10]。次節で検討する Altarelli と Parisi によるパートンモデルを使った QCD のスケーリングの破れの解析への準備として、本節では、Bjorken スケーリングとパートンモデルを一つの例で示す。

(3.1.1)の様な、レプトンと核子の深非弾性散乱(Deep Inelastic Scattering)を電磁相互作用と弱い相互作用で考える(図(3.1))。ここで、実際に測定できるのは、レプトンの移行エネルギー ν と散乱角 θ である。従って、散乱断面積を表す変数はこの二つである。



図(3.1)

$$l(k, s) + N(p, \lambda) \rightarrow l'(k', s') + X(p_n, \lambda_n) \quad (3.1.1)$$

ここで、 l, l' はレプトン、 N は核子、 X はハドロンの n 粒子終状態である。ゲージボソンは、電磁相互作用を考えたとき光子 γ 、弱い相互作用を考えたとき Z または W である。但し、 X 状態は観測されず、(3.1.1)の反応に比べ、非常に長い時間の後、物理的な可能な束縛状態を作るもので、この意味では中間状態と呼ぶかもしれない。各状態の変数 k, k', p, p_n, q は 4 元運動量を、 $s, s', \lambda, \lambda_n$ はスピンを表す。

ここでは、電磁相互作用(l, l' が電子の場合)に議論を限定するが、弱い相互作用でも同様である。実験室系をとり、各運動量を次の様に定義する。

$$\begin{aligned} k &= (E, \mathbf{k}) \\ k' &= (E', \mathbf{k}') \\ q &= (\nu, \mathbf{q}) \\ W^2 &= \sum_n p_n^2 \\ p &= (M, 0) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

レプトン部分とハドロン部分のバーテックスで、エネルギー、運動量保存則を用い、 l, l' の質量が充分小さいという近似を用いると、(3.1.3)、(3.1.4)となる。

$$q^2 = (k - k')^2 \simeq -4E' \sin^2 \frac{\theta}{2} < 0 \quad (3.1.3)$$

$$W^2 = (p + q)^2 = M^2 + q^2 + 2M\nu \quad (3.1.4)$$

ここで, M は核子の質量である。

実験系では M より軽い W はありえないので, (3.1.4)は(3.1.5)と書ける。

$$2M\nu = W^2 - M^2 - q^2 \geq -q^2 \quad (3.1.5)$$

(3.1.6)で x を定義する。

$$x \equiv -\frac{q^2}{2M\nu} \equiv \frac{Q^2}{2M\nu} \quad (3.1.6)$$

$$0 \leq x \leq 1 \quad (3.1.7)$$

x は Bjorken スケーリング変数と呼ばれる。Feynman の規則により, 微分散乱断面積 $d\sigma$ を求めると, 以下のようなになる。ただし, スピン1/2で考えている。

$$d\sigma = \frac{2\pi}{E} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'} \frac{1}{4} e^4 l_{\mu\nu} \left| \frac{-i}{q^2} \right|^2 W^{\mu\nu} \quad (3.1.8)$$

ここで, $l_{\mu\nu}$, $W^{\mu\nu}$ は, 各々, レプトンテンソル(3.1.9)とハドロンテンソル(3.1.10)である。

$$\begin{aligned} l_{\mu\nu} &= \sum_{ss'} (\bar{u}(k', s') \gamma_{\mu} u(k, s))^* (\bar{u}(k', s') \gamma_{\nu} u(k, s)) \\ &= 4[k'_\mu k'_\nu - (k \cdot k') g_{\mu\nu} + k_\nu k'_\mu] \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4M2\pi} \sum_{\lambda\lambda'} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p'_n - p - q) \langle N(p, \lambda) | J_\nu(0) J_\mu(0) | N(p, \lambda) \rangle \quad (3.1.10)$$

但し, $J^\mu(x)$ は電磁カレントである。

電磁カレント保存則より(3.1.11)であり, パリティ保存を考慮すると, $W^{\mu\nu}(p, q)$ は(3.1.12)と書ける。

$$\partial_\mu W^{\mu\nu} = 0 \quad (3.1.11)$$

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}(q^2, p \cdot q) &= -\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\nu q_\mu}{q^2} \right) W_1(q^2, p \cdot q) \\ &\quad + \frac{1}{M^2} (p_\mu - (p \cdot q) \frac{q_\mu}{q^2}) (p_\nu - (p \cdot q) \frac{q_\nu}{q^2}) W_2(q^2, p \cdot q) \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

ここで, スカラー W_1, W_2 は核子の構造関数と呼ばれる。

ここで, (3.1.13)の様な無次元の変数 y を導入し, Q^2 が電子の質量や核の質量よりはるかに大きいとすると(3.1.14)を得る。

$$y = \frac{\nu}{E} = 1 - \frac{E'}{E} \quad (3.1.13)$$

$$0 \leq y \leq 1$$

$$\frac{d^2 \sigma}{dx dy} = \frac{8\pi\alpha^2}{MEx^2 y^2} [xy^2 MW_1 + (1-y)\nu W_2] \quad (3.1.14)$$

これより、 $MW_1, \nu W_2$ は無次元量であるべきで、変数として無次元量 $x, q^2/M^2$ をもつ関係 G_1, G_2 が (3.1.15), (3.1.16) と定義できる。

$$MW_1(q^2, p \cdot q) \equiv G_1\left(x, \frac{q^2}{M^2}\right) \quad (3.1.15)$$

$$\nu W_2(q^2, p \cdot q) \equiv G_2\left(x, \frac{q^2}{M^2}\right) \quad (3.1.16)$$

x を有限に抑え、 $|q^2|$ を無限大にするというスケーリング極限において、 G_1, G_2 は x のみの関係になる。これが、Bjorken スケーリングである。

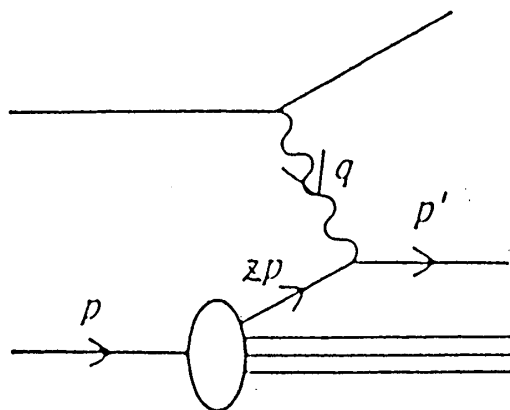
$$F_1(x) = \lim_{\text{scaling}} G_1\left(x, \frac{q^2}{M^2}\right) \quad (3.1.17)$$

$$F_2(x) = \lim_{\text{scaling}} G_2\left(x, \frac{q^2}{M^2}\right) \quad (3.1.18)$$

この $F_1(x), F_2(x)$ をスケーリング関数と呼ぶ。

このスケーリング(3.1.17), (3.1.18) は実験的に確認されていて、これを説明するのがパートンモデルである。パートンモデルでは、核子の構成粒子は弱い束縛状態にあり、高エネルギーの衝撃を与えたとき、点粒子のように扱えるという立場をとる。これは、QCD における無限運動量系(Infinite Momentum Frame)の議論につながる概念である。また、エネルギースケール Q^2 を大きくしていけば、核子のより微細な構造が観測できると考えてよい。

この様に、核子を構成する要素を点粒子として扱うと、図(3.1)の散乱は、図(3.2)の運動量比 z をもつパートンの散乱の問題に帰着する。即ち、散乱されたパートンのみ扱う微分散乱断面積(Inclusive Differential Cross Section)を考えればよい。ここで、親核の、全運動量 p に対し、パートンの担う運動量を zp とすると、 z は運動量比(Momentum Fraction)と呼ばれ、 $0 \leq z \leq 1$ である。



図(3.2)

パートンに関して、散乱前後の運動量とスピンを各々、 zp, p' 及び、 λ, λ' とする。

$f(z)dz$ を運動量比が z から $z+dz$ の間にあるパートンの個数、 $K_{\mu\nu}(z)$ を運動量比 z のパートン1個を考えたときのハドロテンソルとすると、この微分散乱断面積は(3.1.19)の $W_{\mu\nu}$ を通して、(3.1.21)と記すことが出来る。

$$W_{\mu\nu} = \int dz f(z) K_{\mu\nu}(z) \quad (3.1.19)$$

$$K_{\mu\nu} = \frac{Q^2}{4zM2\pi} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2|p'|} \frac{\sum_{\lambda\lambda'} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k' + p' + k - zp)}{\lambda\lambda'} \times (\bar{u}(p', \lambda') \gamma_{\mu} u(zp, \lambda)) (\bar{u}(p', \lambda) \gamma_{\nu} u(zp, \lambda)) \quad (3.1.20)$$

$$d\sigma = \frac{2\pi}{E} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2E'} \frac{1}{4} Q^2 |e|^4 L_{\mu\nu} \left| \frac{-i}{q^2} \right|^2 W^{\mu\nu} \quad (3.1.21)$$

ここで、パートンの担う電荷を $Q|e|$ とした。

$W_{\mu\nu}$ に於て p' 積分を行うと、(3.1.22)を得る。

$$W_{\mu\nu} = \frac{Q^2}{M} \int_0^1 dz f(z) \theta(q^0 + zp^0) \frac{1}{2M\nu} \delta\left(z + \frac{q^2}{2p \cdot q}\right) [p'_\mu p'_\nu - (p \cdot p') g_{\mu\nu} + p_\nu p'_\mu] \quad (3.1.22)$$

これは、運動量比 z がスケーリング変数 x に一致することを示している。

更に、 $p'_\mu = q_\mu + xp_\mu$ を用いて変形し z 積分を実行し $M^2 \ll q^2$ という近似を行うと(3.1.23)を得る。

$$W_{\mu\nu} = f(x) \left[\frac{Q^2}{M^2 \nu} x (p_\mu - (p \cdot q) \frac{q_\mu}{q^2}) (p_\nu - (p \cdot q) \frac{q_\nu}{q^2}) - \frac{Q^2}{2M} (g_{\mu\nu} - \frac{q_\nu q_\mu}{q^2}) \right] \quad (3.1.23)$$

ここで、核子をつくるパートンの種類を i (現在ではクォークとグルーオンの種類と考えてよい) とすれば、(3.1.12)と(3.1.23)を比べ(3.1.15)~(3.1.18)を考慮すれば(3.1.24)、(3.1.25)を得る。

$$MW_1(q^2, p, q) = \sum_i Q_i^2 \frac{1}{2} f_i(x) = F_1(x) \quad (3.1.24)$$

$$\nu W_2(q^2, p \cdot q) = \sum_i Q_i^2 x f_i(x) = F_2(x) \quad (3.1.25)$$

これはBjorkenスケーリングに他ならない。また、この2式より、Callan-Grossの関係式[11]が成り立つことがわかる。

$$F_2(x) = 2xF_1(x) \quad (3.1.26)$$

3-2 QCD への部分分子模型の応用

QCD におけるハドロン中のクォークとグルーオンの分布関数(存在確率)の議論を行う。くりこみ群方程式からこれらの分布関数のエネルギースケール依存性に関するマスター方程式が与えられた [12]。

1977年, Altarelli と Parisi はこれをパートンモデルをによって再現し, 古典的な形式による摂動の規則を用いて, あるクォーク中により小さな運動量をもつ別のクォーツを見いだす確率密度を具体的に求めた[13]。

QCD においてはクォークの閉じ込めの現象がある反面, 幸い漸近的自由という性質がある。これは, 観測者が光速で動くような無限運動量座標系(Infinite Momentum Frame, P_∞ 系と略記する)をとることと同様である。この様な座標系をとれば, クォークは互いに相互作用しない点粒子として扱えるので, パartonモデルが適用できると考える。ここでは, くりこみ群による方法については結果のみを記し, String に拡張しうるパートンモデルによる方法につなげていく。

くりこみ群による結果

エネルギースケールを(3.2.1)で定義し, フレーバーに対する多重項(Non singlet)の場合のクォークの分布関数を $q^{NS}(x, t)$, その n 次のモーメントを $M_n^{NS}(t)$ とすると, 以下が成り立つ。

$$t \equiv \ln \frac{Q^2}{Q_0^2} \quad (3.2.1)$$

$$M_n^{NS} \equiv \int_0^1 dx x^{n-1} q^{NS}(x, t) \quad (3.2.2)$$

ここで, x は運動量比, Q_0 は適当な規格化点(Suitable Normalization Point)である。

また, 有効結合定数を $\alpha(t)$ とし, あるクォーク中に運動量比 z の別のクォークを見いだす確率密度の t の変化に伴う変化分を $P(z)$, その n 次のモーメントを A_n^{NS} とすると, 以下のようになりマスター方程式(3.2.7)が成り立つ。

$$A_n^{NS} \equiv \int_0^1 dz z^{n-1} P(z) \quad (3.2.3)$$

$$M_n^{NS}(t) = M_n^{NS}(0) \left(\frac{\alpha}{\alpha(0)} \right)^{A_n^{NS}/2\pi b} \quad (3.2.4)$$

$$\alpha(0) \equiv \alpha = \frac{g^2}{4\pi} \quad (3.2.5)$$

$$\frac{\alpha}{\alpha(t)} = 1 + bat \quad (3.2.6)$$

$$b = \frac{1}{4\pi} \left(11 - \frac{2f}{3} \right)$$

$$\frac{dq^{NS}(x, t)}{dt} = \frac{\alpha(t)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} q^{NS}(y, t) P(x/y) \quad (3.2.7)$$

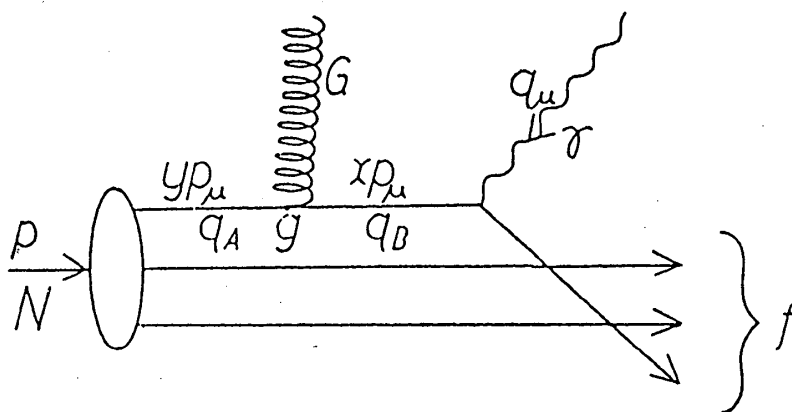
f はフレーバーの個数である。

(3.2.7)をより物理的解釈のしやすい(3.2.8)にかきかえ, これを QCD におけるパートンモデルの出発点とする。

$$q^{NS}(x, t) + dq^{NS}(x, t) = \int_0^1 dy \int_0^1 dz \delta(z-y-x) q^{NS}(y, t) \times [\delta(z-1) + \frac{\alpha(t)}{2\pi} P(z) dt] \quad (3.2.8)$$

$$\mathfrak{P}_{q_A q_B} + d\mathfrak{P}_{q_A q_B} \equiv \delta(z-1) + \frac{\alpha(t)}{2\pi} P_{q_A q_B}(z) dt \quad (3.2.9)$$

これらは、図(3.3)のようなパートンモデルとして解釈される。



図(3.3)

核子中に運動量比 \$y\$ のクォークがあるとき、これはグルーオンを放出して運動量比 \$x\$ になる可能性がある。\$z\$ はそのようなグルーオン放出前のクォークに対する放出後のクォークの運動量比である。

(3.2.9)の第1項 \$\delta(z-1)\$ による部分は、グルーオンの放出がみえない場合に相当する。このときエネルギースケールを \$t\$ とすると、第2項はエネルギースケールが \$t+dt\$ となり、グルーオン \$G\$ の放出がみえてくる場合に相当する。

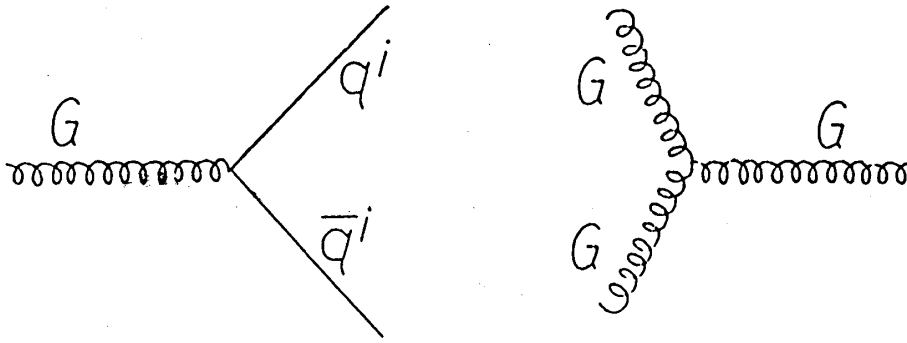
従って、\$\mathfrak{P}_{q_A q_B}\$ は運動量 \$yp\$ のクォーク \$q_A\$ が QCD の3点バーテックスを通して運動量 \$xp\$ のクォーク \$q_B\$ に崩壊する確率密度と言え。以上、簡単のため、多重項をみてきたが、これでは不十分である。

一般には、種々のフレーバーをもったクォークとフレーバー一重項のグルーオンの存在確率 \$q_i(x, t)\$, \$G(x, t)\$ を扱うべきである。即ち、グルーオンそのものも核子の運動量を担い、図(3.3)で \$q_B\$ の部分がグルーオンである場合を考慮する。このとき、オーダー \$g\$ の3点相互作用としては、図(3.4)の二つの場合がある。

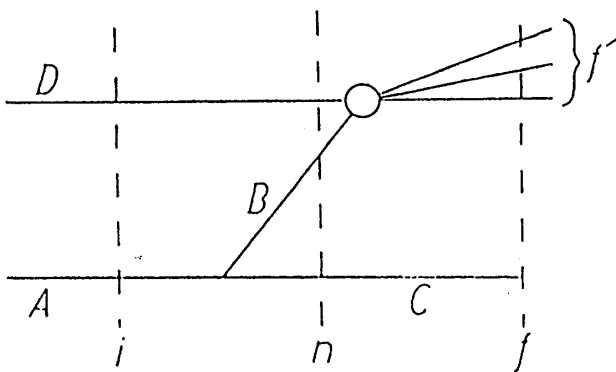
以後、エネルギースケール依存性をみていくので、(3.2.8)の第2項に当たる部分のみ考え、図(3.4)において、クォークのフレーバー \$i\$ は不変であることを考慮すると、マスター方程式として(3.2.10)を得る。

$$\frac{dq^i(x, t)}{dt} = \frac{\alpha(t)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[q^i(y, t) P_{q^i q^i}(x/y) + G(y, t) P_{q^i G}(x/y) \right] \quad (3.2.10.a)$$

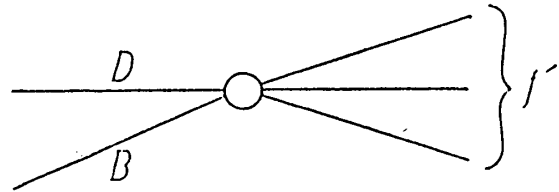
$$\frac{dG(x, t)}{dt} = \frac{\alpha(t)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[\sum_{i=1}^{2f} q^i(y, t) P_{G q^i}(x/y) + G(y, t) P_{GG}(x/y) \right] \quad (3.2.10.b)$$



図(3.4)



図(3.5.a)



図(3.5.b)

ここで、一般論として $P_{BA}(z)$ を計算するために、図(3.5.a) (及びその一部図(3.5.b)) を考える。それを図(3.3)の例で考えると、A, B, C, D, f, は各々 q_A, q_B, G, γ, f に対応すると考えられ、 P_{BA} は $P_{q_B q_A}$ に相当する。

まず、この二つの微分散乱断面積は、(3.2.11)で関係づけられる。

$$d\sigma_a = d\mathfrak{P}_{BA} d\sigma_b dz \tag{3.2.11}$$

Altarelli と Parisi の方法に従い、これらの微分散乱断面積 $d\sigma_a, d\sigma_b$ を古典的形式の摂動論の最低次のオーダーで計算する。このとき、 $d\sigma$ は一般に、始状態、終状態及び中間状態を表す添字を i, f, n とすると、(3.2.12)となる。

$$d\sigma = \prod_i \frac{1}{2E_i} \prod_f \frac{1}{(2\pi)^3 E_f} m_{fi}^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_i k_i - \sum_f k_f\right) \tag{3.2.12}$$

$$m_{fi} = g \frac{V_{i \rightarrow n} V_{n \rightarrow f}}{\sqrt{2E_n(E_n - E_i)}}$$

(3.2.12)より、 $d\sigma_a, d\sigma_b$ が計算される。

$$d\sigma_a = \frac{g^4}{8E_A E_D} \frac{|V_{A \rightarrow B}|^2 |V_{B \rightarrow D \rightarrow f}|^2}{(2E_B)^2 (E_B + E_C - E_A)^2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_A + k_B - k_C - k_f) \\ \times \frac{d^3 k_C}{(2\pi)^3 2E_C} \prod_f \frac{d^3 k_f}{(2\pi)^3 2E_f} \quad (3.2.13.a)$$

$$d\sigma_b = \frac{g^2}{8E_B E_D} |V_{B \rightarrow D \rightarrow f}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_B + k_D - k_f) \prod_f \frac{d^3 k_f}{(2\pi)^3 2E_f} \quad (3.2.13.b)$$

これらを(3.2.11)に用いると

$$d\mathfrak{P}_{BA}(z) dz = \frac{E_B}{E_A} \frac{g^2 |V_{A \rightarrow B+C}|^2}{(2E_B)^2 (E_B + E_C - E_A)^2} \frac{d^3 k_C}{(2\pi)^3 2E_C} \quad (3.2.14)$$

運動量空間 (p^-, p^+, p^\perp) に於て, A, B, C を下のようにとる。

$$k_A = (E_A, p, 0) \\ k_B = (E_0, zp, p^\perp) \\ k_C = (E_C, (1-z)p, -p^\perp)$$

各々のエネルギー E_A, E_B, E_C を

$$p^2 \gg p_\perp^2, m_A^2, m_B^2, m_C^2$$

で近似すると(3.2.15)となる。

$$k_A = (p, p, 0) \\ k_B = (zp + \frac{p_\perp^2}{2zp}, zp, p^\perp) \\ k_C = ((1-z)p + \frac{p_\perp^2}{2(1-z)p}, (1-z)p, -p^\perp) \quad (3.2.15)$$

(3.2.15)のような無限運動量系を考えると、パートン間の相互作用が無いということである。これはQCDに於ける漸近的自由の性質に対応している。

これより(3.2.16)と近似できこれを、(3.2.14)に代入すれば(3.2.17)或は(3.2.18)と定式化される。

$$(2E_B)^2 (E_B + E_C - E_A)^2 \approx \frac{(p_\perp^2)^2}{(1-z)^2} \quad (3.2.16)$$

$$\frac{d^3 k_C}{(2\pi)^3 2E_C} \approx \frac{dx dp_\perp^2}{16\pi^2 (1-z)} \\ d\mathfrak{P}_{BA}(z) = \frac{\alpha(t)}{2\pi} \frac{z(1-z)}{2} \overline{\sum_{spin s}} \frac{|V_{A \rightarrow B+C}|^2}{p_\perp^2} d \ln p_\perp^2 \quad (3.2.17)$$

$$P_{BA}(z) = \frac{1}{2} z(1-z) \overline{\sum_{spin s}} \frac{|V_{A \rightarrow B+C}|^2}{p_\perp^2} \quad (3.2.18)$$

QCDにおけるFeynmanの規則を $V_{A \rightarrow B+C}$ にあてはめれば $P_{qq}, P_{Gq}, P_{qG}, P_{GG}$ が得られる。これについては、結果のみ記しておく。

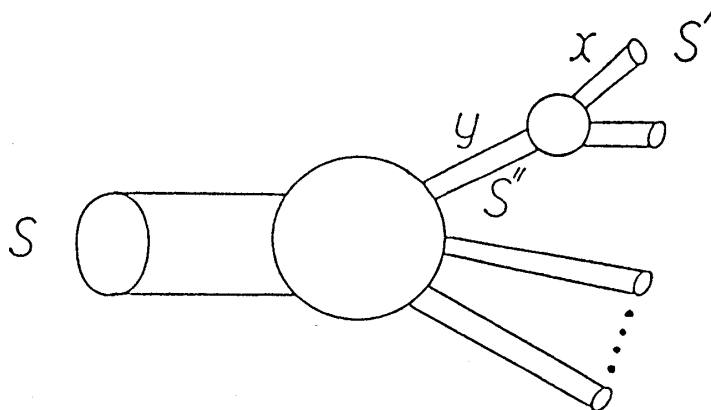
$$\begin{aligned}
 P_{qq}(z) &\sim \frac{1+z^2}{1-z} \\
 P_{Gq}(z) &\sim \frac{1+(1-z)^2}{z} \\
 P_{qG}(z) &\sim z^2+(1-z)^2 \\
 P_{GG}(z) &\sim \frac{1-z}{z} + \frac{z}{1-z} + z(1-z)
 \end{aligned}
 \tag{3.2.19}$$

この方法を4, 5章でStringに応用していく。

4章 弦の発展方程式

4-1 発展方程式

Altarelli-ParisiによるQCDの部分子模型, 図(3.3)の類推で, String Sが, 中間状態としてのString S''を経て, 更に, 他のStringを放出することで, S''よりも小さな運動量比を持つString S'になる過程を考える。(図(4.1))



図(4.1)

この章の目的は, 図(3.3)におけるAltarelli-Parisi方程式(3.2.10)にあたるStringの"発展方程式"と呼ぶべきものを導入することである。

Stringの状態は, 2章で見た様に, 0モードの運動量の縦成分, 横成分, y^+, p^+ 及びExcited Modeの個数のセット $\{n_k^i, (n_k^i)\}$ で決まる。

それらをString S, S'', S'について $(p^+, p^+, \{n_k^i, (n_k^i)\})$, $(p^{+''}, p^{+''}, \{n_k^{i''}, (n_k^{i''})\})$, $(p^{+'}, p^{+'}, \{n_k^{i'}, (n_k^{i'})\})$ の記し, 縦成分の運動量比に類してSに対するS', S''の値を x, y , S''に対するS'の値を z とする。

この章の目的は, 図(3.3)におけるAltarelli-Parisi方程式(3.2.10)にあたるStringの"発展方程式"と呼ぶべきものを導入することである。

Stringの状態は, 2章で見た様に, 0モードの運動量の縦成分, 横成分, p^+, p^+ 及びExcited Modeの個数のセット $\{n_k^i, (n_k^i)\}$ で決まる。

それらを String S, S', S'' について $(p^+, p^+, |n_k^i|)$, $(p^{+''}, p^{+''}, |n_k^{i''}|, (n_k^{i''}))$, $(p^{+'}, p^+, |n_k^i|, (n_k^i))$ と記し, 縦成分の産動量比に関して S に対する S', S'' の値を x, y, S'' に対する S' の値を z とする。

$$p^{+'} = xp^+ \quad (4.1.1.a)$$

$$p^{+''} = yp^+ \quad (4.1.1.b)$$

$$p^+ = zp^{+'} \quad (4.1.1.c)$$

QCD のパートンモデルと同様に, エネルギースケール Q^2 が大きくなると String のより微細な構造が観測出来ると考える。 S から S' への崩壊関数 (Decay Function) を $D_{S'S}$, S'' が他の String を放出する確率を $\mathfrak{P}_{S'S''}$ とすると, それらは Q^2 と運動量比に依存する。

ここで Q^2 の変化に伴う $D_{S'S}(x, Q^2)$, $\mathfrak{P}_{S'S''}(z, Q^2)$ の変化分を各々 $dD_{S'S}(x, Q^2)$, $d\mathfrak{P}_{S'S''}(z, Q^2)$ とする。

$$dD_{S'S}(x, Q^2) = \frac{\delta D_{S'S}(x, Q^2)}{\delta Q^2} dQ^2 \quad (4.1.2)$$

$$d\mathfrak{P}_{S'S''}(z, Q^2) = \frac{\delta \mathfrak{P}_{S'S''}(z, Q^2)}{\delta Q^2} dQ^2 \quad (4.1.3)$$

S'' の運動量比 y が x に一致したとき, S'' の更なる崩壊は, S 中の運動量比 x の String を見いだす確率を減少させる。

以上より, (4.1.4) が成立する。

$$\begin{aligned} dD_{S'S}(x, Q^2) &= D_{S'S}(x, Q^2 + dQ^2) - D_{S'S}(x, Q^2) \\ &= \sum_{S''} \int_0^1 dz \int_0^1 dy \delta(x - yz) d\mathfrak{P}_{S'S''}(z, Q^2) D_{S'S}(y, Q^2) \\ &\quad - \sum_{S''} \int_0^1 dz d\mathfrak{P}_{S'S''}(z, Q^2) D_{S'S}(x, Q^2) \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

第1項について, z 積分を実行すると, 運動量比に関して $y = x/z \geq x \geq 0$ であるから

$$\begin{aligned} &D_{S'S}(x, Q^2 + dQ^2) - D_{S'S}(x, Q^2) \\ &= \sum_{S''} \int_0^1 \frac{dy}{y} d\mathfrak{P}_{S'S''}\left(\frac{x}{y}, Q^2\right) D_{S'S}(y, Q^2) \\ &\quad - \sum_{S''} \int_0^1 dz d\mathfrak{P}_{S'S''}(z, Q^2) D_{S'S}(x, Q^2) \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

となり, ここで (4.1.6) の様な 3 点相互作用による $S'' \rightarrow S'$ の崩壊確率の Q^2 の変化に伴う増加率を表す $P_{S'S''}(z, Q^2)$ を導入し, (4.1.7) を得る。

$$P_{S'S''}(z, Q^2) = Q^2 \frac{d\mathfrak{P}_{S'S''}(z, Q^2)}{dQ^2} \quad (4.1.6)$$

$$Q^2 \frac{dD_{S'S}(x, Q^2)}{dQ^2} = \sum_{S''} \int_0^1 \frac{dy}{y} P_{S'S''}\left(\frac{x}{y}, Q^2\right) D_{S'S}(y, Q^2)$$

$$-\sum_{s'} \int_0^1 dz P_{s's}(z, Q^2) D_{s's}(x, Q^2) \quad (4.1.7)$$

(4.1.7)は String における Altarelli-Parisi 方程式に相当する。以後、我々はこれを "発展方程式" (Evolution Equation)と呼ぶ。

4-2 弦の崩壊関数のエネルギー依存性

ここでは、String の構造を表す量、特に P_{BA} の Q^2 依存性を明確にしたい。

(4.1.7)の様なたたみこみ積分(Convolution Integral)を解く為には、 n 次のモーメントを導入し、Mellin 変換を用いればよい。 $D_{s's}$, $P_{s's}$ の n 次のモーメントを各々(4.2.1)で定義すると(4.2.2)を得る。

$$M_n^{s's}(Q^2) \equiv \int_0^1 dx x^{n-1} D_{s's}(x, Q^2) \quad (4.2.1.a)$$

$$A_n^{s's}(Q^2) \equiv \int_0^1 dx x^{n-1} P_{s's}(x, Q^2) \quad (4.2.1.b)$$

$$Q^2 \frac{dM_n^{s's}(Q^2)}{dQ^2} = \sum_{s'} (A_n^{s's'}(Q^2) - A_1^{s's'}(Q^2)) A_n^{s's''}(Q^2) \quad (4.2.2)$$

今、Altarelli-Parisi の方法に従い、 $S = \{n_k^i, (\bar{n}_k^i)\}$,

$S' = \{n_k^j, (\bar{n}_k^j)\}$ で記述される無限次元の Fock 空間において、

$(A_n - A_1)^{s's'}$ を対角化できたとする。この対角化されたマトリックスの固有値を $\lambda_n(Q^2)$, 固有状態を $|C\rangle$ と記す。

$$(A_n - A_1)_{s's'} |C\rangle_{s'} = \lambda_n(Q^2) |C\rangle_s \quad (4.2.3)$$

この解を(4.2.4)と記し、この固有状態を S' の状態と同一視する。

$$\lambda_n(Q^2) = \{ \lambda_n^\alpha(Q^2) \} = \{ \lambda_n^1(Q^2), \lambda_n^2(Q^2), \dots \} \quad (4.2.4.a)$$

$$|c\rangle = \{ |c\rangle^\alpha = \{ |s^1\rangle, |s^2\rangle, \dots \} \quad (4.2.4.b)$$

これを(4.2.2.)に代入すると、(4.2.5), (4.2.6)を得る。

$$Q^2 \frac{dM_n^{\alpha s}(Q^2)}{dQ^2} = \lambda_n^\alpha(Q^2) M_n^{\alpha s} \quad (4.2.5)$$

$$\frac{M_n^{\alpha s}(Q^2)}{M_n^{\alpha s}(Q_0^2)} = \exp \left[\int_{Q_0^2}^{Q^2} \frac{dQ'^2}{Q'^2} \lambda_n^\alpha(Q'^2) \right] \quad (4.2.6)$$

ここで、 Q_0^2 は任意のエネルギースケールである。

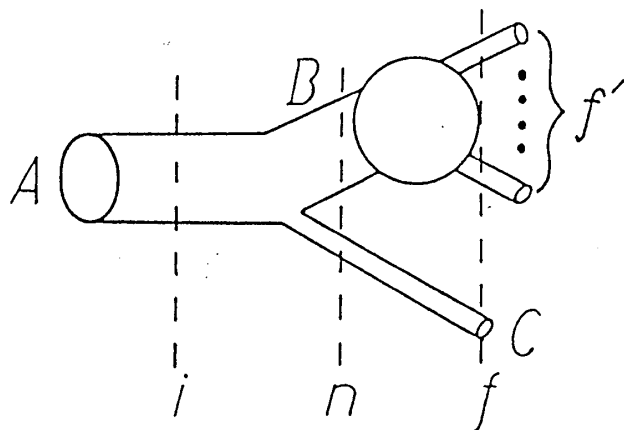
(4.2.6)式は、QCD では(3.2.4)に相当し、スケーリングの破れを記述するものである。String ではスケーリングははじめから成立しない。 $\lambda_n(Q^2)$ は結合定数(Coupling Constant)に比例するもので、

これが指数となっているので、 Q^2 依存性の度合が、String の場合、非常に大きいことがわかる。

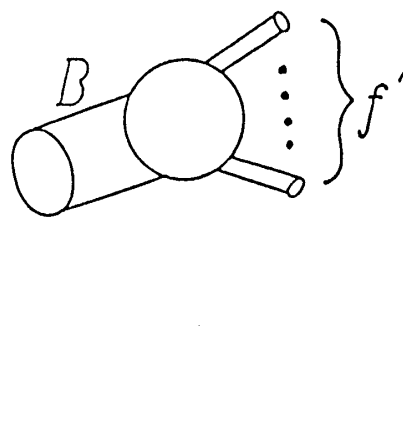
4-3 遷移確率分布

次に、弦の $P's'(z, Q^2)$ を 3 点相互作用について公式化する。ここでは、2-3 で示した古典的な摂動による規則と 4-1 で示した $d\mathfrak{B}s'(Z, Q^2)$ を用いる。

まず、図(4.2.a) の様な String の崩壊過程と、その一部 図(4.2.b) の過程の崩壊幅(Decay Width) $d\Gamma_a$, $d\Gamma_b$ 及び、その間の関係を書き下す。



図(4.2.a)



図(4.2.b)

$$d\Gamma_a = \frac{g^4}{2|p_A^+|} \frac{|V_{A \rightarrow B+C}|^2 |V_{B \rightarrow f}|^2}{(2p_B^+)^2 (E_A - E_B - E_C)^2} (2\pi)^D \delta^{(D)}(p_A - p_C - \sum_f p'_f) \\ \times \frac{dp_C^+ dp_C^\perp}{(2\pi)^{D-1} 2|p_C^+|} \prod_f \frac{dp_f^+ dp_f^\perp}{(2\pi)^{D-1} 2|p_f^+|} \quad (4.3.1.a)$$

$$d\Gamma_b = \frac{g^2}{2|p_B^+|} |V_{B \rightarrow f}|^2 (2\pi)^D \delta^{(D)}(p_B + \sum_f p_f) \prod_f \frac{dp_f^+ dp_f^\perp}{(2\pi)^{D-1} 2|p_f^+|} \quad (4.3.1.b)$$

$$d\Gamma_a = d\mathfrak{B}_{BA}(z, Q^2) dz d\Gamma_b \quad (4.3.2)$$

(4.3.1), (4.3.2) より (4.3.3) となる。

$$d\mathfrak{B}_{BA}(z, Q^2) dz = \frac{d\Gamma_a}{d\Gamma_b} = \frac{|p_B^+|}{|p_A^+|} \frac{g^2 |V_{A \rightarrow B+C}|^2}{(2p_B^+)^2 (E_A - E_B - E_C)^2} \frac{dp_C^+ dp_C^\perp}{(2\pi)^{D-1} 2|p_C^+|} \quad (4.3.3)$$

今、Light Cone の運動量空間 (P^-, P^+, P^\perp) において、(4.3.4) となる様な座標系をとる。

$$\begin{aligned} p_A &= (E_A, p, 0) \\ p_B &= (-E_B, -zp, -q^\perp) \\ p_C &= (-E_C, -(1-z)p, q^\perp) \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

この系で, Klein-Gordon 方程式 $E = p^- = \frac{1}{2p^+}(p_\perp^2 + m^2)$ を用いると (4.3.5), (4.3.6) となる。

$$(2p_B^+)^2(E_A - W_B - E_C)^2 = \frac{1}{(1-z)^2} |q_\perp^2 - z(1-z)m_A^2 + (1-z)m_B^2 + zm_C^2|^2 \quad (4.3.5)$$

$$\frac{dp_C^+}{|2p_C^+|} = \frac{dz}{2(1-z)}$$

$$d^{D-2}p_C^\perp = |p_C^\perp|^{D-3} d|p_C^\perp| \int d\Omega_{D-2} = \frac{1}{D-2} d|p_C^\perp|^{D-2} \frac{2\pi^{(D-2)/2}}{\Gamma((D-2)/2)}$$

ここで, $\int d\Omega_{D-2}$ は $D-2$ 次元の単位球の表面積である。

$$\frac{dp_C^+ dp_C^\perp}{(2\pi)^{D-1} |p_C^+|} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(D/2)} \frac{dz}{1-z} |dq_\perp|^{D-2} \quad (4.3.6)$$

エネルギースケール (Reference Scale) Q^2 は, パートンモデルの場合, $-q^2 > 0$ としたが, ここでは, 構成成分の運動量 q で定義する。

$$Q^2 = |q_\perp|^2 > 0 \quad (4.3.7)$$

(4.3.5), (4.3.6) を用いて, (4.3.3) を書き直す。

$$\begin{aligned} d\mathfrak{P}_{BA}(z, Q^2) dz &= \frac{g^2}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(D/2)} z(1-z) \\ &\times \frac{|V_{A \rightarrow B+C}|^2}{(q_\perp^2)^2 [1 - \{z(1-z)m_A^2 + (1-z)m_B^2 + zm_C^2\}/q_\perp^2]} \\ &\times d|q_\perp|^{D-2} dz \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

(4.1.6) に上記の (4.3.7), (4.3.8) をもちいて, (4.3.9) を得る。

$$\begin{aligned} P_{BA}(z, Q^2) &= \frac{(D-2)g^2}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(D/2)} \frac{1}{2} z(1-z) (Q^2)^{D-6/2} \\ &\times \overline{\Sigma} \left\{ \frac{|V_{A \rightarrow B+C}|^2}{[1 - \{z(1-z)m_A^2 + (1-z)m_B^2 + zm_C^2\}/Q^2]^2} \right\} \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

ここで $\overline{\Sigma}$ は内部量子数について始状態 A については平均し, 終状態 B, C についてはたしあげることを意味する。

これで, 光円錐ゲージの最低次の摂動における String の $P_{BA}(z, Q^2)$ が定式化された。ここでは摂動以外には何の近似も行っていない。

5章 弦の遷移確分率分布のエネルギーの大きな範囲での近似形

Lorentz 不変性を要求するとき, Open String においては3点相互作用が必要であるが[14], ここでは, 3点相互作用について考える。

我々は, 3点相互作用のバーテックスとして(2.3.37),(2.3.38)を得ているので, これを Excited Mode の粒子数表示した(5.1.1.a), (5.1.1.b)を用いれば, 原理的には図(4.1)に対する $P_{BA}(z, Q^2)$ を求めることが出来ると言ってもよい。

$$\begin{aligned} V_{A \rightarrow B+C}^{open} &= \langle A, B, C | V_{open} \rangle \\ &= \langle \{n_k^{i(1)}, \{n_k^{i(2)}, \{n_k^{i(3)}\} | V_{open} \rangle \end{aligned} \quad (5.1.1.a)$$

$$\begin{aligned} V_{C \rightarrow B+C}^{closed} &= \langle A, B, C | V_{closed} \rangle \\ &= \langle \{n_k^{i(1)}, \tilde{n}_k^{i(1)}, \{n_k^{i(2)}, \{n_k^{i(3)}, \tilde{n}_k^{i(3)}\} | V_{closed} \rangle \end{aligned} \quad (5.1.1.b)$$

しかし, (2.3.37), (2.3.38)といった3点バーテックスは複雑で扱いにくい。この章では, $P_{BA}(z, Q^2)$ の Q^2 の大きい範囲での振舞いを見たいので, $O(P^0)$ の項を, $O(P^1)$, $O(P^2)$ の項に対して無視するという近似を行う。又, その結果から, 崩壊関数の Q^2 依存性について, 物理的に考察する。

はじめに上述の近似によるバーテックスの陽な表示と, その意味について考える。以後 $O(P^0) \sim O$ の近似によるバーテックス V 及び P_{BA} は, \sim をつけて表すことにする。

(2.3.37),(2.3.38)のバーテックスは, (5.1.2)となる。

$$\begin{aligned} |V_{open}\rangle &= \exp\left\{ \sum_{r,s=1}^3 \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{1}{2} \alpha_{-k}^{(r)} \bar{N}_{kl}^{rs} \alpha_{-l}^{(s)} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{p} \sum_{r=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \bar{N}_k^r \alpha_{-k}^{(r)} - \frac{\tau_0}{2} \left(\frac{\mathbf{p}^2}{\alpha} + 2 \sum_{r=1}^3 \frac{1}{\alpha_r} \right) \right\} |0\rangle \\ &\sim \exp\left\{ \mathbf{p} \sum_{r=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \bar{N}_k^r \alpha_{-k}^{(r)} - \frac{\tau_0}{2} \frac{\mathbf{p}^2}{\alpha} \right\} |0\rangle \\ &\equiv |\tilde{V}_{open}\rangle \end{aligned} \quad (5.1.2.a)$$

$$\begin{aligned} |V_{closed}\rangle &= \exp\left\{ \sum_{r,s=1}^3 \sum_{kl=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\alpha_{-k}^{(r)} \bar{N}_{kl}^{rs} \alpha_{-l}^{(s)} + \tilde{\alpha}_{-k}^{(r)} \bar{N}_{kl}^{rs} \tilde{\alpha}_{-l}^{(s)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \mathbf{p} \sum_{r=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \bar{N}_k^r (\alpha_{-k}^{(r)} + \tilde{\alpha}_{-k}^{(r)}) - \frac{\tau_0}{4} \left(\frac{\mathbf{p}^2}{\alpha} + 8 \sum_{r=1}^3 \frac{1}{\alpha_r} \right) \right\} |0\rangle \\ &\sim \exp\left\{ \frac{1}{2} \mathbf{p} \sum_{r=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \bar{N}_k^r (\alpha_{-k}^{(r)} + \tilde{\alpha}_{-k}^{(r)}) - \frac{\tau_0}{4} \frac{\mathbf{p}^2}{\alpha} \right\} |0\rangle \\ &\equiv |\tilde{V}_{closed}\rangle \end{aligned} \quad (5.1.2.b)$$

この近似は, 以下よりから明かな様に $(\mathbf{p}^+)^2$, $2\alpha' P^+$ が, 質量 m^2 に比べて充分大きい範囲で $|\tilde{V}\rangle$ が適用できることを意味している。

$$p^- = \frac{1}{2p^+} [(\mathbf{p}^+)^2 + m^2]$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} p^+ [(P^\perp)^2 + \frac{1}{\alpha} (\sum_{k>0} \alpha^i_{-k} \alpha^i_k - 1)] & \text{(for open)} \\ \frac{1}{2} p^+ [(P^\perp)^2 + \frac{1}{\alpha'} (\sum_{k>0} \alpha^i_{-k} \alpha^i_k + \tilde{\alpha}^i_{-k} \tilde{\alpha}^i_k - 2)] & \text{(for closed)} \end{cases}$$

String の場の理論では, (5.1.3) が成り立つので, m_r^2 のオーダーは $k(n_k^{i(r)}+1)$ である。

$$\alpha_{-k}^{i(r)} |n_k^{i(r)}\rangle = \sqrt{k(n_k^{i(r)}+1)} |n_k^{i(r)}\rangle \quad (5.1.3)$$

従って今の場合, エネルギースケール Q^2 と, A,B,C の質量 $m_r^2 (r=1\sim 3)$ について (5.1.4) となる。

$$Q^2 = |p^\perp|^2 \gg m_r^2$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\alpha'} (\sum_{i=1}^{D-2} \sum_{k=1}^{\infty} k n_k^{i(r)} - 1) & \text{(for open)} \\ \frac{1}{\alpha'} (\sum_{i=1}^{D-2} \sum_{k=1}^{\infty} k (n_k^{i(r)} + \tilde{n}_k^{i(r)}) - 2) & \text{(for closed)} \end{cases} \quad (5.1.4)$$

ここで

$$\alpha' = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{(for open)} \\ \frac{1}{4} & \text{(for closed)} \end{cases}$$

(4.3.9) に, (5.1.4) を用いて, この近似における $P_{BA}(z, Q^2)$ を定式化する。

$$P_{BA}(z, Q^2)^{Q^2 \gg m_r^2} \tilde{P}_{BA}(z, Q^2)$$

$$= \frac{(D-2)g^2}{(4\pi)^{D/2}} \frac{1}{(D/2)} z(1-z) (Q^2)^{\frac{D-6}{2}}$$

$$\times \overline{\Sigma} |V_{A \rightarrow B+C}|^2 \quad (5.1.5)$$

5-2 Open String に関する計算

まず (5.1.5) 中の $V_{A \rightarrow B+C}$ を近似したバーテックスにより求める。

$$\tilde{V}_{A \rightarrow B+C}^{open} = \langle A, B, C | \tilde{V}_{open} \rangle$$

$$= \langle \{n_k^{i(1)}\}, \{n_k^{i(2)}\}, \{n_k^{i(3)}\} |$$

$$\exp \left\{ p \sum_{r=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \bar{N}_k^r \alpha_{-k}^{i(r)} - \frac{\tau_0}{2} \frac{p^2}{\alpha} \right\} | 0 \rangle \quad (5.2.1)$$

$$= e^{-\tau_0 p^2 / 2\alpha} \langle \{n_k^{i(1)}\}, \{n_k^{i(2)}\}, \{n_k^{i(3)}\} | \exp \left\{ p \sum_{r=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \bar{N}_k^r \alpha_{-k}^{i(r)} \right\} | 0 \rangle \quad (5.2.2)$$

ここでは, 振動モードの基底状態 $|0\rangle$ は, p^2 に関して固有値 p^2 を持つことを用いている。(2.3.26) で導入した, コヒーレント状態を考える。ここでは, String の各方向の各モードは独立に扱えるので, 1つの振動子についてのコヒーレント状態を $|\rangle$ としてその性質を記しておく。

$$|\xi\rangle \equiv e^{\xi a^\dagger} |0\rangle \quad (5.2.3)$$

$$a|\xi\rangle = \xi|\xi\rangle \quad (5.2.4)$$

$$\langle n|e^{\xi a^\dagger}|0\rangle = \frac{\xi^n}{\sqrt{n!}} \quad (5.2.5)$$

(5.2.5)に(5.2.5)を用いれば(5.2.6)となる。

$$\tilde{V}_{A \rightarrow B+C}^{open} = e^{-\tau_0 p^2 / 2\alpha} \prod_{r=1}^3 \prod_{i=1}^{D-2} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n_k^{i(r)}!}} (\mathbf{p}^i \bar{N}_k^r \sqrt{K})^{n_k^{i(r)}} \quad (5.2.6)$$

(5.1.5)に(5.2.5)を用いれば, Open String の 3 点相互作用を考えたときの $P_{BA}(z, Q^2)$ が求められる。

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{BA}(z, Q^2) &= \frac{(D-2)g^2}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(D/2)} \frac{1}{2} z(1-z) (Q^2)^{\frac{D-6}{2}} \bar{\Sigma} |V_{A \rightarrow B+C}|^2 \\ \bar{\Sigma} |V_{A \rightarrow B+C}|^2 &= \bar{\Sigma} e^{-\gamma_0 p^2 / \alpha} \prod_{r=1}^3 \prod_{i=1}^{D-2} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k^{i(r)}!} \frac{1}{i(r)!} (\mathbf{p}^i \bar{N}_k^r \sqrt{k})^{2n_k^{i(r)}} \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

今, (4.3.4)の座標系を考えているので, (5.2.7)に現れる各量は(5.2.8)~(5.2.14)となる。

$$P \equiv \alpha_1 \mathbf{p}^\perp - \alpha_2 \mathbf{p}_1^\perp = -2p \mathbf{q}^\perp \quad (5.2.8)$$

$$\alpha \equiv \prod_{r=1}^3 \alpha_r = \delta z (1-z) p^3 \quad (5.2.9)$$

$$\tau_0 \equiv \sum_{r=1}^3 \alpha_r \ln \alpha_r = -2p [z \ln z + (1-z) \ln(1-z)] \quad (5.2.10)$$

$$\exp\left[\frac{-\tau}{\alpha} p^2\right] = \exp\left[\frac{\mathbf{q}^2 [z \ln z + (1-z) \ln(1-z)]}{z(1-z)}\right] \quad (5.2.11)$$

$$\bar{N}_k^{(1)} = \frac{1}{2p} \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(2kz)}{\Gamma(kz+1-k)} e^{-kz \ln z + (1-z) \ln(1-z)} \quad (5.2.12)$$

$$\bar{N}_k^{(2)} = \frac{-1}{2zp} \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(-k \frac{1-z}{z})}{\Gamma(-k \frac{1-z}{z} + 1-k)} e^{k \frac{1}{2} [z \ln z + (1-z) \ln(1-z)]} \quad (5.2.13)$$

$$\bar{N}_k^{(3)} = \frac{-1}{2(1-z)p} \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(\frac{k}{1-z})}{\Gamma(\frac{k}{1-z} + 1-k)} e^{\frac{1}{1-z} [z \ln z + (1-z) \ln(1-z)]} \quad (5.2.14)$$

Neumann 系数に関しては, (2.3.40)を用いた。これらにより, (5.2.7)は, (5.2.15)とも表せる。

$$\bar{\Sigma} |V_{A \rightarrow B+C}|^2 = \bar{\Sigma} e^{-Q^2 \hat{\tau}_0} \prod_{r=1}^3 \prod_{i=1}^{D-2} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k^{i(r)}!} (\mathbf{q}^i)^2 (\bar{N}_k^r)^2 k^{n_k^{i(r)}} \quad (5.2.15)$$

ここでは, 次の様に, 定義した。

$$\tilde{\tau}_0 \equiv -\frac{z \ln z + (1-z) \ln(1-z)}{z(1-z)} \quad (5.2.16)$$

$$\tilde{N}_k \equiv 2p \tilde{N}_k^r \quad (5.2.17)$$

(5.2.7)又は、(5.2.15)における $\bar{\Sigma}$ は String の始状態、終状態及び、内部量子数に依存する。

(1) タキオンの崩壊

ここで簡単な例として、A がタキオンの場合、即ち $|n_k^{i(r)}\rangle = |0\rangle$ を考える。終状態 B, C については、エネルギー、運動量が観測され $|n_k^{i(r)}\rangle$ ($r=2,3$) は内部量子数であるとする。つまり、(5.2.7)、(5.2.15)における $\bar{\Sigma}$ は $|n_k^{i(r)}\rangle$ ($r=2,3$) に関するたしあげとなる。

従って、この場合、(5.2.15)は(5.2.18)となる。

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma} |\langle 0, B, C | \tilde{V}_{open} \rangle|^2 &= \sum_{|n_k^{i(2)}\rangle, |n_k^{i(3)}\rangle} e^{-Q^2 \tilde{\tau}_0} \prod_{r=1}^3 \prod_{i=1}^{D-2} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k^{i(r)}!} (q^i)^2 (\tilde{N}_k^r)^2 k^{n_k^{i(r)}} \\ &= \prod_{r=1}^3 \prod_{i=1}^{D-2} \prod_{k=1}^{\infty} e^{-Q^2 \tilde{\tau}_0 + (q^i)^2 (\tilde{N}_k^r)^2 k} \\ &= e^{Q^2 [\sum_k k \{(\tilde{N}_k^{(2)})^2 + (\tilde{N}_k^{(3)})^2\} - \tilde{\tau}_0]} \end{aligned} \quad (5.2.18)$$

(5.2.18)を(5.2.7)に用いると、タキオンから任意の String への遷移確率分布 P_{B0} の $Q^2 \gg m_r^2$ のふるまいは、(5.2.19)で与えられることがわかる。

$$\begin{aligned} P_{B0}(z, Q^2) &\xrightarrow{Q^2 \gg m_r^2} \tilde{P}_{B0}(z, Q^2) \\ &= \frac{(D-2)g^2}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(D/2)} \frac{1}{2} z(1-z) (Q^2)^{\frac{D-6}{2}} e^{Q^2 F_{B0}^{open}(z)} \\ F_{B0}^{open}(z) &= \sum_k k \{(\tilde{N}_k^{(2)})^2 + (\tilde{N}_k^{(3)})^2\} - \tilde{\tau}_0 \end{aligned} \quad (5.2.19)$$

(2) 任意の String A から任意の String B への崩壊(一般の場合)

この場合も観測されるのは、0モードの運動量であり、各振動モードは、内部量子数扱いされる。 $\bar{\Sigma}$ は始状態 A のモードの $|n_k^{i(r)}\rangle$ については平均をとり、終状態 B, C の $|n_k^{i(r)}\rangle$ ($r=2,3$) については、和をとることになる。

$$\bar{\Sigma} |\langle A, B, C | \tilde{V}_{open} \rangle|^2 = \frac{1}{\Omega_A^{open}} \sum_{|n_k^{i(2)}\rangle, |n_k^{i(3)}\rangle} |\langle A, B, C | \tilde{V}_{open} \rangle|^2 \quad (5.2.20)$$

ここで Ω_A は始状態 A の縮退度である。

String A の質量 m_A が $m_A^2 = (N-1)/\alpha'$ であるとき

$$\Omega_A = \Omega_N^{open} \quad \underbrace{N \gg 1}_{\sim} e^{4\pi^2 \sqrt{N}} \approx e^{4\pi^2 m_A} \ll e^{2\sqrt{2} \pi^2 Q} \quad (5.2.21)$$

と推量出来る[3]。

又、

$$\sum_{\{n_k^{i(r)}\}_{r=1,2,3}} |\langle A, B, C | \tilde{V}_{open} \rangle|^2$$

の計算は、(5.2.18)を導いたのと全く同様に行えるので、(5.2.22)となる。

$$\sum_{\{n_k^{i(r)}\}_{r=1,2,3}} |\langle A, B, C | \tilde{V}_{open} \rangle|^2 \sim e^{4\pi^2 m_A} e^{Q^2} [\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^3 k (\hat{N}_k^r(z))^2 - \hat{\tau}_0(z)] \quad (5.2.22)$$

(5.2.21)より Ω_A^{open} による項は無視出来るので、 $P_{BA}(z, Q^2)$ について(5.2.23)~(5.2.25)を得る。

$$P_{BA}(z, Q^2) \xrightarrow{Q^2 \gg m^2 r} \tilde{P}_{BA}(z, Q^2) = \frac{(D-2)g^2}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(D/2)} \frac{1}{2} z(1-z) (Q^2)^{\frac{D-6}{2}} e^{Q^2 F_{BA}^{open}(z)} \quad (5.2.23)$$

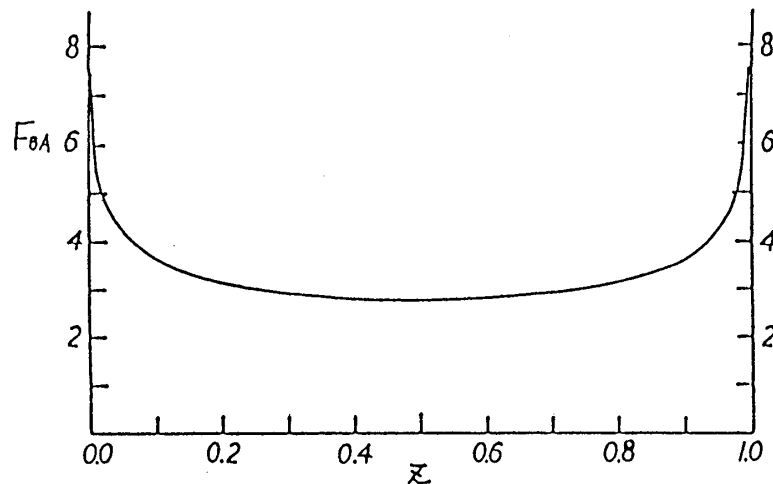
$$F_{BA}^{open}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^3 k (\hat{N}_k^r(z))^2 - \hat{\tau}_0(z) \quad (5.2.24)$$

$$= \hat{\tau}_0(z) = -\frac{z \ln z + (1-z) \ln(1-z)}{z(1-z)} \quad (5.2.25)$$

ここでは Neumann 関数の係数に関する関係式(5.2.26)を用いた[14]。

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^3 k (\hat{N}_k^r(z))^2 = 2\hat{\tau}_0(z) \quad (5.2.26)$$

$F_{BA}(z)$ は図(5.1)の形をもつ。



図(5.1)

5-3 Closed String に関する計算

Closed String については右回りと左回りを考えるので、その状態を決定するセットとしては $(p^+, p^-, \{n_k^i, \tilde{n}_k^i\})$ とするが、 $\bar{\Sigma}$ をとる段階で、物理的状態の条件(Physical state condition)(5.3.1)を課す。

$$N_r = \tilde{N}_r \quad (5.3.1)$$

$$N_r = \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{k=1}^{\infty} k n_k^{i(r)} \quad (5.3.2.a)$$

$$\tilde{N}_r = \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{k=1}^{\infty} k \tilde{n}_k^{i(r)} \quad (5.3.2.b)$$

(5.3.1)の拘束条件は, (5.3.3)に同値であり, この形で $P_{BA}(z, Q^2)$ に導入すると都合がよい。

$$\prod_r \delta_{N_r, \tilde{N}_r} = \prod_r \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_r}{2\pi} e^{i\theta_r \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{k=1}^{\infty} k (n_k^{i(r)} - \tilde{n}_k^{i(r)})} \quad (5.3.3)$$

一般的に任意の String A から任意の String B への崩壊を考える。始状態 A の縮退度は, Open String の場合と同様に $m_A^2 = (N + \tilde{N} - 2)/\alpha'$ を考慮して(5.3.4)と推定される[3]。

$$\Omega'_A = \Omega_{N+\tilde{N}}^{\text{closed}} \underbrace{N=\tilde{N}>1}_{\sim} e^{4\sqrt{2}\pi^2\sqrt{N+\tilde{N}}} \simeq e^{4\sqrt{2}\pi^2 m_A} \ll e^{4\sqrt{2}\pi^2 Q} \quad (5.3.4)$$

(5.1.2.b)の $|\tilde{V}_{\text{closed}}\rangle$ を用いて, $V_{A \rightarrow B+C}^{\text{closed}}$ を Open String の場合と同じ手順で計算する。便宜上,

$$|\{n_k^{i(1)}, \tilde{n}_k^{i(1)}\}, \{n_k^{i(2)}, \tilde{n}_k^{i(2)}\}, \{n_k^{i(3)}, \tilde{n}_k^{i(3)}\}\rangle = |\prod_{r=1}^3 \{n, \tilde{n}\}^{(r)}\rangle$$

と略記する。

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{A \rightarrow B+C}^{\text{closed}} &= \langle A, B, C | \tilde{V}_{\text{closed}} \rangle \\ &= \langle \prod_{r=1}^3 \{n, \tilde{n}\}^{(r)} | \exp \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{p} \sum_{r=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{N}_k^r (\alpha_{-k}^{(r)} + \tilde{\alpha}_{-k}^{(r)}) - \frac{\tau_0 \mathbf{p}^2}{4\alpha} \right\} | 0 \rangle \\ &= e^{-\tau_0 \mathbf{p}^2 / 4\alpha} \langle \prod_{r=1}^3 \{n, \tilde{n}\}^{(r)} | \exp \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{p} \sum_{r=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{N}_k^r (\alpha_{-k}^{(r)} + \tilde{\alpha}_{-k}^{(r)}) \right\} | 0 \rangle \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

Closed String の右回りと左回りは Fock 空間で考えるとき, (5.3.3)の拘束条件を課せば, 独立に扱える。従って, コヒーレント状態法を用いる際, Open String の(5.2.5), (5.2.6)に相当する式は, (5.3.6), (5.3.7)となる。

$$\langle n | e^{s a^\dagger} | 0 \rangle = \frac{\xi^n}{\sqrt{n!}} \quad (5.3.6)$$

$$\langle \tilde{n} | e^{s a^\dagger} | 0 \rangle = \frac{\xi^n}{\sqrt{\tilde{n}!}} \quad (5.3.6)$$

$$\tilde{V}_{A \rightarrow B+C}^{\text{closed}} = e^{-\tau_0 \mathbf{p}^2 / 4\alpha} \prod_{r=1}^3 \prod_{i=1}^{D-2} \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\tilde{n}_k^{i(r)}!}} \left(\frac{\mathbf{p}^i}{2} \tilde{N}_k^r \sqrt{k} \right) n_k^{i(r)} \frac{1}{\sqrt{\tilde{n}_k^{i(r)}!}} \left(\frac{\mathbf{p}^i}{2} \tilde{N}_k^r \sqrt{k} \right) \tilde{n}_k^{i(r)} \right\} \quad (5.3.7)$$

前述の縮退度 Ω'_A に関する(5.3.4)と拘束条件(5.3.3)を考慮して(5.3.8)が得られる。

$$\begin{aligned} \overline{\Sigma} | \langle A, B, C | \tilde{V}_{closed} \rangle |^2 &= \frac{1}{\Omega_A'} e^{-\tau_0 D^2 / 2\alpha} \sum_{\Pi_{i=1}^3 |n_i, \tilde{n}_i^{\tau_i}|} \prod_{r=1}^3 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_r}{2\pi} e^{i\theta_r \sum_i \Sigma_k k(k_k^{i(\tau)} - \tilde{n}_k^{i(\tau)})} \\ &\times \prod_i \prod_k \left\{ \frac{1}{\sqrt{n_k^{i(\tau)}!}} \left(\frac{p^i}{2} \tilde{N}_k^{\tau} \sqrt{k} \right)_{n_k^{i(\tau)}} \frac{1}{\sqrt{\tilde{n}_k^{i(\tau)}!}} \left(\frac{p^i}{2} \tilde{N}_k^{\tau} \sqrt{k} \right)_{\tilde{n}_k^{i(\tau)}} \right\}^2 \\ &\sim e^{4\sqrt{2}\pi^2 m_A} \prod_{r=1}^3 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_r}{2\pi} e^{\frac{Q^2}{2} [\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\tau=1}^3 k (\tilde{N}_k^{\tau}(z))^2 \cos(m\theta_r) - \tilde{\tau}_0(z)]} \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

(5.3.4)により縮退度 Ω_A' による項は無視出来て, $P_{BA}(z, Q^2)$ について(5.3.9), (5.3.10)を得る。

$$\begin{aligned} P_{BA}(z, Q^2) &\xrightarrow{Q^2 \gg m^2} \tilde{P}_{BA}(z, Q^2) \\ &= \frac{(D-2)g^2}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(D/2)} \frac{1}{2} z(1-z) (Q^2)^{\frac{D-6}{2}} \prod_{r=1}^3 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_r}{2\pi} e^{Q^2 F_{BA}^{closed}(z, \theta_1, \theta_2, \theta_3)} \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

$$F_{BA}^{closed}(z, \theta_1, \theta_2, \theta_3) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\tau=1}^3 k (\tilde{N}_k^{\tau}(z))^2 \cos(m\theta_r) - \tilde{\tau}_0(z) \right\} \quad (5.3.10)$$

5-4 遷移確率分布の近似形の評価

ここでは, 5-2 及び 5-3 で求めた $Q^2 \gg m^2$ の評価での $P_{BA}(z, Q^2)$ を用いて, String の崩壊関数の Q^2 依存性を議論したい。3点相互作用を考えている今, String A, B は図(4.1)の s, s' にあたる。崩壊関数の n 次のモーメントの Q^2 依存性は, QCD からの類推で, (4.2.6)で表されているので, $P_s^s(z, Q^2)$ を Mellin 変換して, $A_n^{s's}(Q^2)$ を求め, それから, 物理的考察を行う。

(4.2.1.b)に(5.2.23), (5.3.9)を用いて, (5.4.1)を得る。

$$A_n^{s's\text{open}}(Q^2) = \frac{(D-2)g^2}{(4\pi)^{D-2} \Gamma(D/2)} (Q^2)^{\frac{D-2}{2}} \int_0^1 dz \frac{1}{2} z^n (1-z) e^{Q^2 F_{s's}^{\text{open}}(z)} \quad (5.4.1.a)$$

$$A_n^{s's\text{closed}}(Q^2) = \frac{(D-2)g^2}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(D/2)} (Q^2)^{\frac{D-2}{2}} \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_r}{2\pi} \frac{1}{2} z^n (1-z) e^{Q^2 F_{s's}^{\text{closed}}(z, \theta_1, \theta_2, \theta_3)} \quad (5.4.1.b)$$

(5.4.1)において積分を支配するのは, $F_{s's}$ に極大値を与える Z からの寄与である。この考えは, 統計力学における分布関数から, 粒子数, 体積が大きいという近似により熱力学的な量を導く鞍点法 (saddle point method) と同じである。

今, この鞍点を一般に $Z = Z_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots)$ で考えると(5.4.2)の様に書くことが出来る。

$$A_n^{s's}(Q^2) \underset{Q^2 \rightarrow \infty}{\sim} g^2 \sum_{\alpha} C_{n\alpha} e^{Q^2 F_{s's}(z_\alpha)} \quad (5.4.2)$$

ここで $C_{n\alpha}$ は, $F_{s's}(z)$ の展開における 2次以下の非支配的な項を含む様な適当な係数であるが, 陽な表示は, ここでは必要無い。

次に, 必要なのは, $F_{s's}(z)$ の $0 < z < 1$ の形と, その極大値を与える点 z_α である。

ここで(5.2.16), (5.2.17)より(5.4.3)及び終状態 B, C ($r=2, 3$)の対称性, 言い換えると, 運動量比に関する z と $(1-z)$ の対称性を表す(5.4.4)が考えられる。

$$\tilde{\tau}_0(1-z) = \tilde{\tau}_0(z) \quad (5.4.3.a)$$

$$\widehat{N}_k^{(1)}(1-z) = (-1)^{k+1} \widehat{N}_k^{(1)}(z) \quad (5.4.3.b)$$

$$\widehat{N}_k^{(2)}(1-z) = (-1)^{k+1} \widehat{N}_k^{(3)}(z) \quad (5.4.3.c)$$

$$F_{s's}(z) = F_{s's}(1-z) \quad (5.4.4)$$

何故ならば、 $F_{s's}(z)$ は、Open String, Closed String に対して(5.4.5)となるからである。

$$\begin{aligned} F_{s's}^{open}(1-z) &= \sum_{r=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} k (\widehat{N}_k^{(r)}(1-z))^2 - \widehat{\tau}_0(1-z) \\ &= \sum_{r=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} k \{(-1)^{k+1} \widehat{N}_k^{(r)}(z)\}^2 - \widehat{\tau}_0(z) \\ &= F_{s's}^{open}(z) \end{aligned} \quad (5.4.5.a)$$

$$\begin{aligned} F_{s's}^{closed}(1-z, \theta_1, \theta_2, \theta_3) &= \frac{1}{2} \left[\sum_{r=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} k (\widehat{N}_k^{(r)}(1-z))^2 \cos(k\theta_r) - \widehat{\tau}_0(1-z) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{r=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} k \{(-1)^{k+1} \widehat{N}_k^{(r)}(z)\}^2 \cos(k\theta_r) - \widehat{\tau}_0(z) \right] \\ &= F_{s's}^{closed}(z, \theta_1, \theta_2, \theta_3) \end{aligned} \quad (5.4.5.b)$$

次に、振動モードのたしあげ $\overline{\Sigma}$ を考える。

Neumann 関数の係数に関する関係式(5.2.26)により、 $F_{s's}^{open}(z)$ については(5.2.25)が求められている。Closed String では、 $P_{s's}(z, Q^2)$, $A_n^{s's}(Q^2)$ において(5.3.9), (5.4.1.b)の様に θ_r の積分があるが、鞍点法を用いているので、 $F_{s's}^{closed}(z)$ に極大値を与える $\theta_r=0$ ($r=1\sim 3$)を採用して解析していけばよい。この様な理由から $\theta_r=0$ について $F_{s's}(z)$ を書き下しておく。

$$F_{s's}^{open}(z) = \widehat{\tau}_0(z) = \frac{z \ln z + (1-z) \ln(1-z)}{z(1-z)} \quad (5.4.6.a)$$

$$F_{s's}^{closed}(z, 0, 0, 0) = -\frac{1}{2} \widehat{\tau}_0(z) = -\frac{z \ln z + (1-z) \ln(1-z)}{z(1-z)} \quad (5.4.6.b)$$

(5.4.6.a)より Closed String に関しても図(5.1)を考えればよいことがわかる。図(5.1)即ち(5.4.6)式における $z=0, 1$ 付近の特異性は、 $I \cdot R$ (Infra Red)の特異性であり、赤外発散消去の標準的な処方箋で消せると一般に信でられている。 $I \cdot R$ の Cut-Off δ ($\delta \ll 1$)を導入して、 $F_{s's}(z)$ に極大値を与える $Z\alpha$ を $\delta, 1-\delta$ とする。(5.4.6)にこの δ を用いると、(5.4.7)の様な $F_{s's}(\delta)$ を定義出来る。

$$F_{s's}(\delta) \equiv F_{s's}^{open}(\delta) = 2F_{s's}^{closed}(\delta) \quad (5.4.7)$$

(5.4.2), (5.4.4)及びこの $F_{s's}(\delta)$ を用いて、Open String, Closed String 共に $A_n^{s's}(Q^2)$ を(5.4.8)の様に評価することが出来る。従って、 Q^2 依存性についても Open String, Closed String をまとめて議論することが出来る。

$$A_n^{s's}(Q^2) \xrightarrow{Q^2 \gg m^2 r} \widetilde{A}_n^{s's}(Q^2) = g^2 C_n e^{Q^2 F_{s's}(\delta)} \quad (5.4.8)$$

(4.2.2)を解き, $D_{s's}$ に関する n 次のモーメント $M_n^{s's}(Q^2)$ を求める際, 形式的に $(A_n - A_1)^{s's'}$ の Fock 空間上での対角化を考えた。しかし, P_{BA} , あるいは $P_{s's}$ を計算する際, 振動モード(の個数)について観測せず $\bar{\Sigma}$ としてたしあげを行っている為, この対角化は事実上意味が無い。即ち $\lambda_n^{s's}(Q^2)$ は, $A_n^{s's}$ の固有値であるとしてさしつかえない。よって, Q^2 依存性を示す(4.2.6)式で $\lambda_n^{s's}(Q^2)$ に, (5.4.8)の $A_n^{s's}$ を用いることが出来て, (5.4.9)となる。

$$\frac{M_n^{s's}(Q^2)}{M_n^{s's}(Q_0^2)} \xrightarrow{Q^2 \gg m^2 r} \exp\left[\int_{Q_0^2}^{Q^2} \frac{dQ'^2}{Q'^2} g^2 C_n e^{Q'^2 F_{s's}(Q')}$$

この指数部の積分を支配するのは, 規格化点 Q_0^2 (suitable normalization point)より非常に大きな Q^2 である。

このような部分だけみると(5.4.10)と表される。

$$M_n(Q^2) \sim a_n \exp[b_n g^2 e^{Q^2 F(Q)}] \quad (5.4.10)$$

ここで a_n, b_n は任意定数である。

(5.4.10)と QCDにおける(3.2.4)式を比較して, 次のことがわかる。

モーメント $M_n(Q^2)$ の2重の exponential の振舞いは, String 固有のものである。1つの e は QCD の場合にすでに現れていて, 無限個のダイアグラム(摂動の全オーダーにあたる)のたしあげによるものであることは, 自明である。

もう1つの e は String 固有のもので, Excited Mode が無限個存在することに起因する。

6章 結論

String の S から S' への崩壊関数 $D_{s's}$ に関して, 発定方程式が一般的に(4.1.7)のように定式化できた。

光円錐座標では, このように String が一方向に走り, 崩壊していく描像が有効である。これより3点相互作用に関して, 摂動の最低次のオーダーで遷移確率密度 $P_{BA}(z, Q^2)$ が(4.3.9)のように定式化された。

更に, エネルギー Q^2 が大きい範囲で, 崩壊関数の n 次モーメントが, (5.4.10)で与えられ, これは, String のエネルギー依存性が非常に高いこと, 及び, 赤外領域の寄与が大きいことを示している。

以上の議論は, 次の点で不十分である。

- (1) 結合定数としてベアな量 g を用い, 有効結合定数 $g(Q^2)$ を導入していない。
- (2) QCD においては, くりこみ群を使った結果と Altarelli と Parisi の方法による結果に矛盾がない。

String においても同様にくりこみ群を使った方法を用い, 対応をつけるべきである。

- (3) String の崩壊幅を計算するとき, 内部量子数として振動モードひとつのたしあげを行うことにより, (4.2.3)において遷移確率分布 P_{BA} のモーメント $(A_n - A_1)_{s's}$ を振動モードに関する無次元の Fock 空間で対角化するという数学的あいまいさを許している。
- (4) 統一理論の立場から, 遷移確率分布 $P_{BA}(z, Q^2)$ について, Q^2 を小さくしていくときの振舞いを見るのが要求される。しかし, String のバーテックスの複雑さから, Q^2 が String の質量に

対して大きいという近似しか行っていない。

- (5) 物理量を計算する際、振動モードの個数に関するたしあげを、すべてのモードに関して等重率で行っている。

(5)に関しては、有限温度における振動モードの分布関数を導入し、高い振動数を自然に落とすことが可能ではないかと思われ、当面の課題となった。又、これができれば、(3)も解決できるのではないかと考えている。

他の問題に関しては、Stringのくりこみ理論の発展が待たれるが、これは非常に難しい問題である。

謝 辞

この修士論文作成にあたって、菅本晶夫先生には、御熱心、御丁寧な御指導を賜りました。ありがとうございました。

参考文献

- [1] K. Kikkawa, 夏の学校講義録(1984)
- [2] M. Kaku, *Introduction to Superstring*, Springer-Verlag(1988)
- [3] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, *Superstring theory*, Cambridge Univ. Press. (1986)
- [4] M. Kaku and K. Kikkawa, Phys. Rev. **D10**(1974)1110, 1823; K. Kikkawa and S. Sawada, Preprint, OU-HET120(1989)
- [5] Y. Nambu, *Lectures in Copenhagen*, (1970); T. Goto, Prog. theor. Phys. **46** (1971)1560
- [6] A. M. Polyakov, Phys. Lett. **103B**(1981)207, 211
- [7] M. B. Green and J. H. Schwarz, Nucl. Phys. **B218**(1983)43
- [8] M. Marui, I. Oda and A. Sugamoto, Mod. Phys. Lett. **A22**(1989)2177 and preprint, OCHA-PP-3, CHIBA-EP-25(1989)
- [9] J. D. Bjorken and E. A. Paschos, Phys. Rev. **185**(1969)1975
- [10] Feynman, R. P. *Photon-hadron-interaction*, Benjamin, Reading Massachusetts (1972)
- [11] C. G. Callan and D. Gross, Phys. Rev. Lett. **22** (1969) 156
- [12] D. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30** (1973)1343
H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1346
- [13] G. Altarelli and G. Parisi, Nucl. Phys. **B216** (1977) 298 (1987)76
- [14] T. Yoneya, Phys. Lett. **197B**(1987)76