

THE SOLAR NEUTRINO PUZZLE

お茶の水女子大・理 大森美樹^[1], 杉山敏子^[2], 中道晶香^[3]

(1989年4月17日受理)

はじめに

この論文は、1989年2月23日に、お茶の水女子大学理学部物理学科4年生の卒論発表会において、発表した内容です。ニュートリノに関する知識など全くなかった私達が、少しずつ理解していったことをまとめたものです。ですから、このテーマになじみのない方にもご理解いただけたと思います。

目次

- 1章 要旨
- 2章 ^{37}Cl の実験
- 3章 KAMIOKANDE — I の実験
- 4章 STANDARD SOLAR MODEL
- 5章 真空中でのニュートリノ振動
- 6章 物質中でのニュートリノ振動 — 断熱的な場合
- 7章 物質中でのニュートリノ振動 — 非断熱的な場合
- 8章 磁気モーメントがある?
- 9章 結論
- 10章 将来の実験
- 参考文献

1章 要旨

太陽からとんでくるニュートリノをつかまえる実験が、1970年ごろからアメリカの Davis らによって行われてきたが、その結果が standard solar model から期待される理論値の $1/2 \sim 1/3$ の値になった。というのが solar neutrino puzzle である。この puzzle の解として

- i) 実験が間違っている。…………… 2, 3章
- ii) standard solar model が間違っている。…………… 4章
- iii) ニュートリノに何かがおこっている。…………… 5, 6, 7, 8章

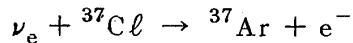
という三つが考えられる。

現所属：[1] 宇宙通信㈱，[2] リクルート㈱，[3] お茶の水女子大学 M1

我々は、この問題に関する文献からソーラーニュートリノの現状について学び、その puzzle の原因についての解析を行った。

2章 ^{37}Cl の実験¹⁾

この実験は、アメリカの南ダコタ州ホームスティック鉱山の地下で Davis らによって行われている。基本過程は



(中性子による ν_e 捕獲)

この ν_e 捕獲によって生成される ^{37}Ar を検出することによって、 ν_e の flux がわかる。ここでは、0.814 MeV以上の ^8B からのニュートリノをつかまえている。

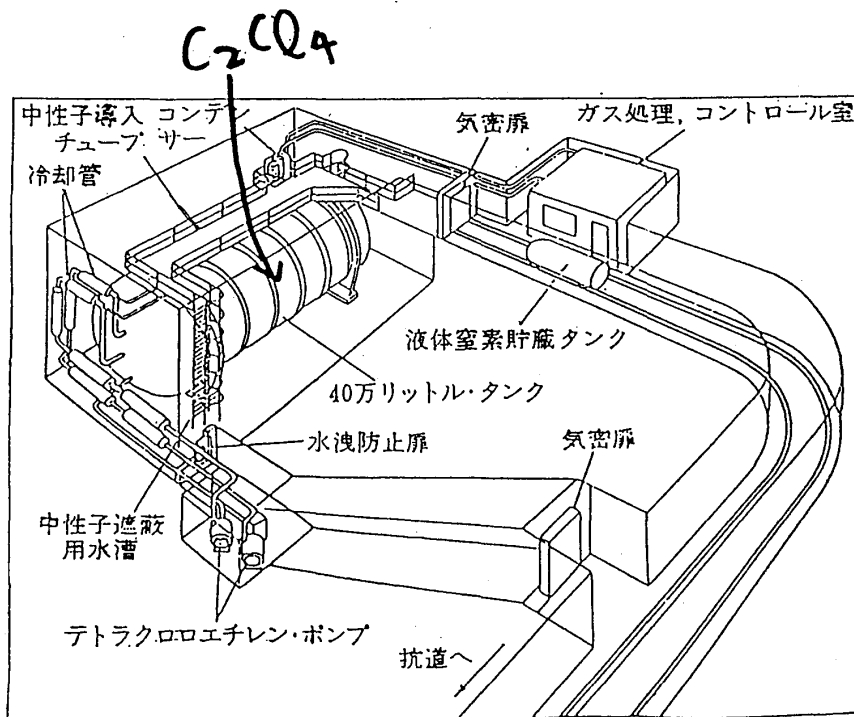


図 2.1 デーヴィスの実験装置の略図。

<検出方法>

- ターゲットとしてタンクの中に入れられている 615 t の C_2Cl_4 を使う。
- ニュートリノと反応して生成した ^{37}Ar を、タンクの中に混ぜられた He gas といっしょにとり出す。
- ガス処理コントロール室で、純粋な ^{37}Ar にする。
- 得られた ^{37}Ar が崩壊する (半減期 35 日) ときに放出するオージェ電子を、比例計数管で count する。

<実験結果>²⁾

^8B からのニュートリノの flux は

$$2.1 \pm 0.3 \text{ SNU (1970~1985)}$$

5.0 ± 0.8 SNN (1986~1987)

となり、理論値

7.9 ± 2.6 SNN

のほぼ 1/2~1/3 となっている。

☆ SNU = 10^{-30} capture/atom·s

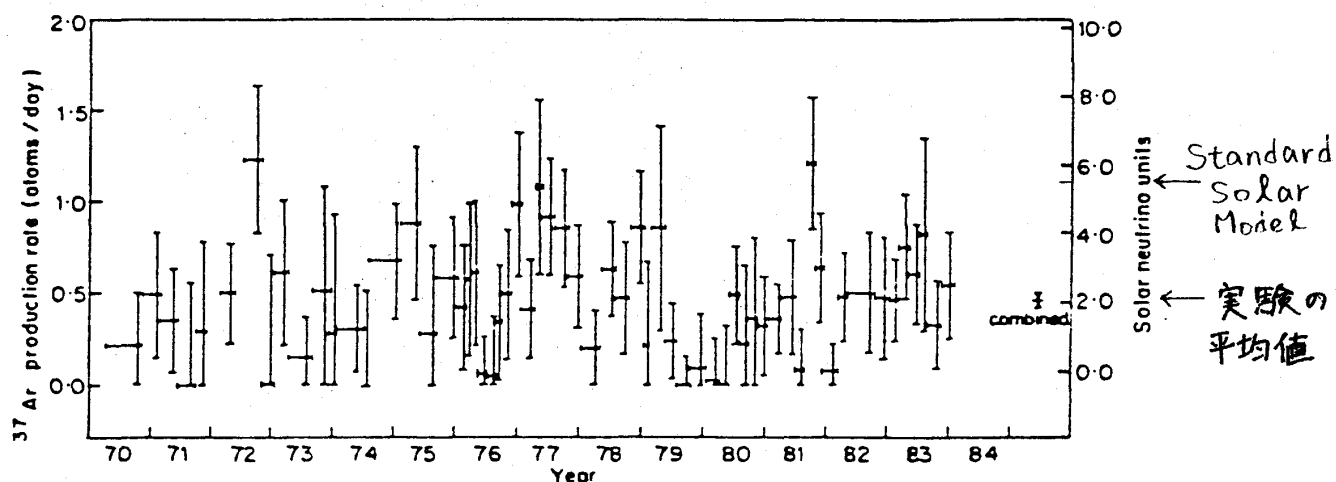
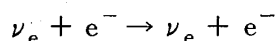


FIGURE 2.2 Results of the Homestake neutrino experiment.

R.J.N. Phillips, RAL-87-075

3章 KAMIOKANDE-Iの実験

この実験は岐阜県神岡鉱山の地下で行われている。基本過程は



このとき前方にはじき飛ばされた e^- を検出することによって、 ν_e の flux がわかる。ここでは 9.3 MeV 以上の ^8B からのニュートリノをつかまえている。

<検出方法>

- 直径高さとも約 16 m の円筒形のタンクにターゲットとして 3000 t の水が入れている。
- タンクの壁には、直径約 50 cm の光電子増倍管が一面にとりつけられている。
- 散乱した電子が、水中を高速で走る時に発生するチェレンコフ光を、この光電子増倍管によって検出。
- データを counting room で磁気テープに記録する。
- この実験では、太陽と電子の方向に相関がみられる。よって、太陽の方向と同方向の event 数をソーラーニュートリノによるものと考え、flux を得る。

<実験結果>³⁾

^8B からのニュートリノの flux は

0.45 SSM (1σ)

FIGURE 3.1

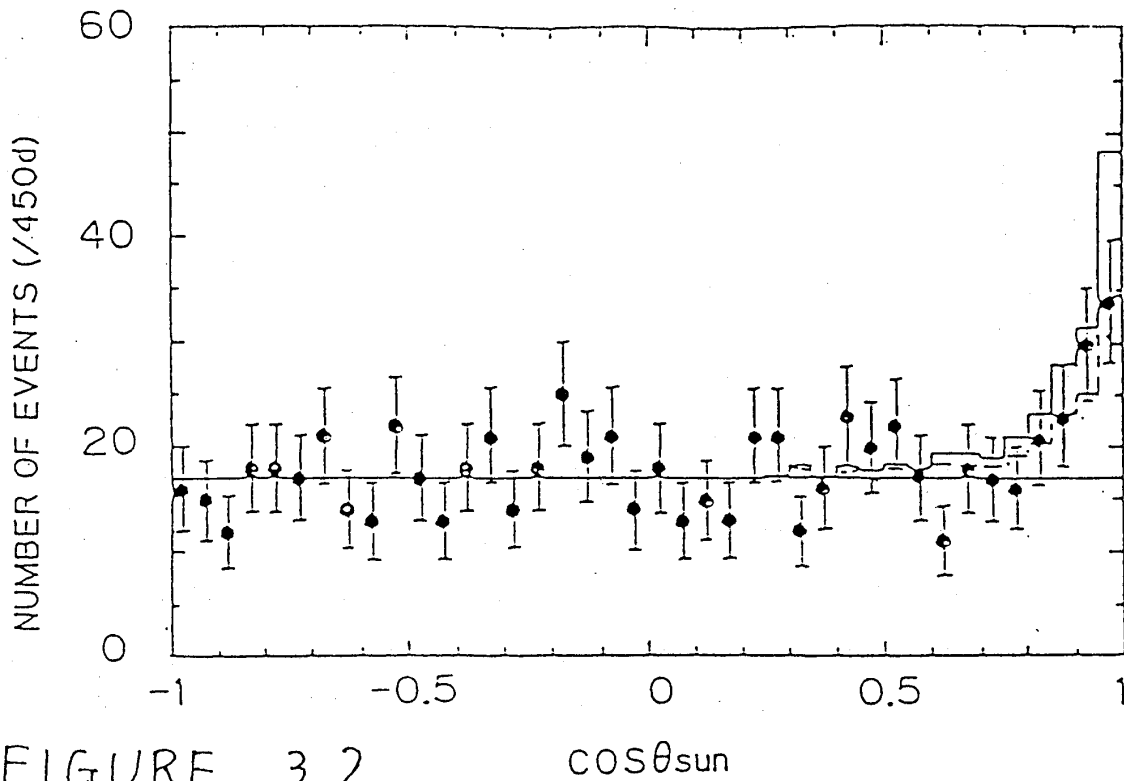
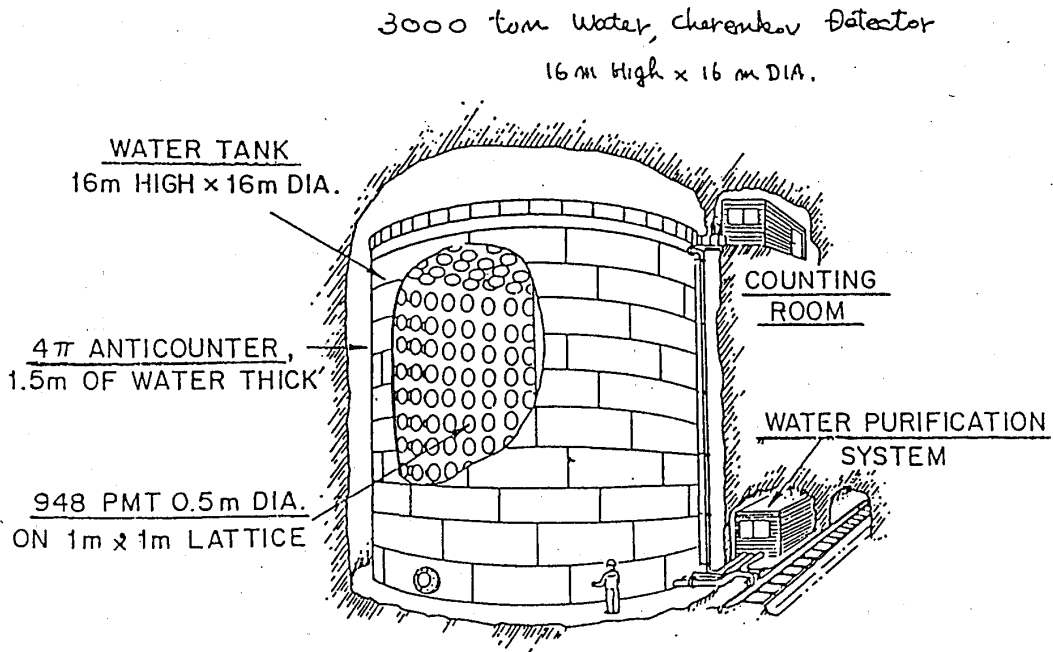


FIGURE 3.2

cos θ_{sun} distribution for an energy threshold of 10.2 MeV. Solid and dashed histograms are the SSM prediction and the best fit, respectively.

(1987年1月~1988年5月)

☆ SSM = $5.9 \times 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$

(Standard Solar Modelの理論値)

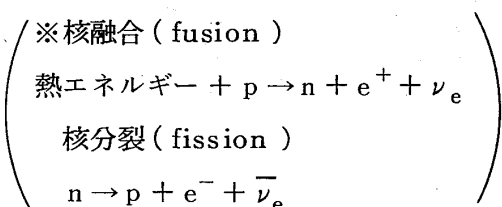
となり理論値の約 45% という結果となった。

2章, 3章からの結論

^{37}Cl の実験での ^{37}Ar の回収能率がかなり高いこと、また、二つの実験結果がほぼ一致していることから、実験が間違っているという解は考えにくい。

4章 STANDARD SOLAR MODEL (SSM)^{4), 5)}

太陽で作られたニュートリノ ν_e は $6 \times 10^{10} \nu_e / (\text{cm}^2 \cdot \text{sec})$ の flux で地球を突き抜けている。これは、実験室での高エネルギーの ν ビームの flux よりもはるかに大きく、原子力発電所から 300 m の地点での値と同じである。但し、原子炉からは核分裂による反ニュートリノ $\bar{\nu}$ を発し、太陽からは核融合によるニュートリノ ν を発している。主な核融合の過程は p-p chain と CNO cycle であり、4つの陽子が $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$ という過程を通して、ニュートリノ ν_e を放出しながら ^4He に変化していく。



ν_e の flux の値で、実験と理論では食い違いがあるという事実の 2 番目の解法として Standard Solar Model が間違っている事が考えられる。Standard Solar Model は以下の仮定の上で成り立つ。⁶⁾

- 1) 太陽は球対称の形状をとる。
- 2) 内部は到る所が静水圧平衡にある (内部圧力 = 重力)。
- 3) エネルギー創成は p-p 反応と CNO cycle のみによる (p-p chain から 98.5%, CNO cycle から 1.5%)。
- 4) エネルギーは輻射及び対流のみによって輸送される (対流は重力場が存在する中で温度勾配が大きくなると、輻射だけでエネルギーを運びきれず巨視的な流体の運動が発生することで、太陽の外側 ($\geq 0.73 R_\odot$) の部分に存在する)。
- 5) 太陽の初期化学組成は一律均一である (H : 73%, He : 25%, それ以上の重元素 : 2%)。
- 6) この組成は現在の太陽光球面の化学組成と同じである。
- 7) 太陽誕生以来の質量損失は無視できる。
- 8) 対流層以外で物質混合は起こらない。
- 9) 太陽の自転は無視できる。
- 10) 太陽内部の磁場の役割は殆どゼロである。
- 11) 重力定数 G は太陽の進化中不変であった。

Solar Model は、現在光球面に現れている化学組成が初期のものと同じであると仮定し、その進化を 47 億年分だけ追跡し理論的な Luminosity (光度) になる様に求められた。

太陽の中での核融合反応では ν_e のみ作られ、 ν_μ や ν_τ は作られない。また、 ^8B からのニュートリノは、

量は少ないがエネルギーが高いため Davis や神岡の実験ではこの ν_e が測定されている。

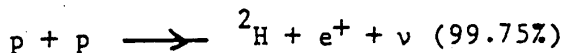


FIGURE 4.1

The pp chain

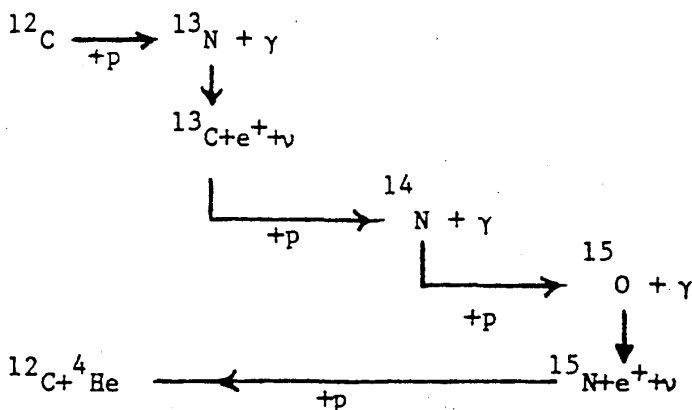
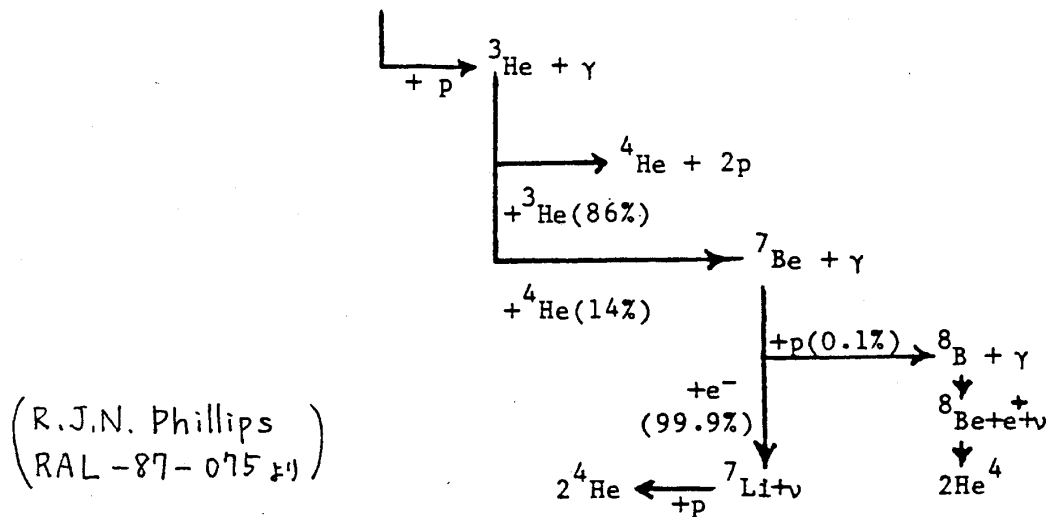
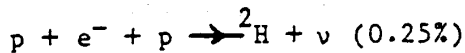


FIGURE 4.2

The CNO cycle

(R.J.N. Phillips, RAL-87-075)

Source	Energy (MeV)	Flux ($\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$)
$pp \rightarrow {}^2\text{H} + e^+ + \nu$	< 0.42	6×10^{10}
${}^{13}\text{N} \rightarrow {}^{13}\text{C} + e^+ + \nu$	< 1.20	5×10^8
${}^{15}\text{O} \rightarrow {}^{15}\text{N} + e^+ + \nu$	< 1.73	4×10^8
${}^8\text{B} \rightarrow {}^8\text{Be} + e^+ + \nu$	< 14.06	4×10^6
${}^7\text{Be} + e^- \rightarrow {}^7\text{Li} + \nu$	= 0.86	4×10^9
	= 0.38	4×10^8
$p + e^- + p \rightarrow {}^2\text{H} + \nu$	= 1.44	1.5×10^8

TABLE 4.1

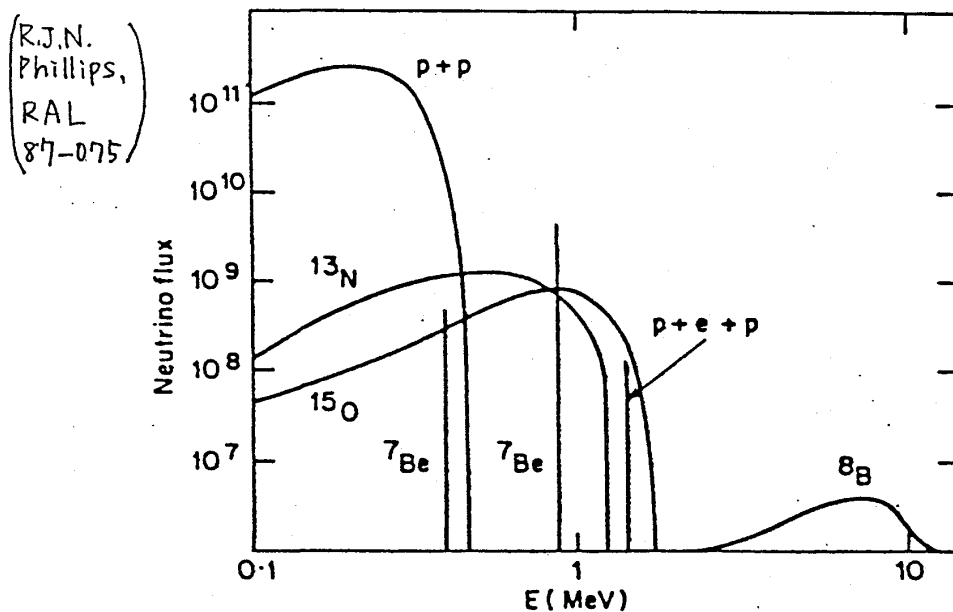


FIGURE 4.3 Standard model solar neutrino fluxes [ref. 1]; continuum sources in units $\text{cm}^{-2} \text{sec}^{-1} \text{MeV}^{-1}$, line sources in $\text{cm}^{-2} \text{sec}^{-1}$.

Standard Solar Model を求めた概略を表わそう。

<核反応の運動論>⁷⁾

2種類の核が衝突する際に行う反応を考える。あまり高密度でない限り ($\rho < 10^{10} \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$) 縮退は無視できるから、その速度分布は

$$N_i(v_i) d^3 v_i = n_i \left(\frac{m_i}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_i v_i^2}{2kT}\right) d^3 v_i$$

のようなマックスウェル分布で表わせる。ここで n_i , m_i は i 種 ($i = 1, 2$) の核の粒子密度, および質量である。衝突により核反応がおこる確率は, 衝突断面積を σ とすると

$$dI_{12} = \sigma(|v_1 - v_2|) |v_1 - v_2| N_1(v_1) N_2(v_2) d^3 v_1 d^3 v_2 \quad (\text{sec}^{-1} \cdot \text{cm}^{-3})$$

である。二つの粒子の相対速度を v , 重心の速度を V とすると

$$v = v_1 - v_2 \quad V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

より, 運動エネルギーは

$$E_1 + E_2 = \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} \mu v^2$$

$$m = m_1 + m_2 \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{m}$$

となり, 速度空間は

$$d^3 v_1 d^3 v_2 = \frac{2(v_1, v_2)}{2(v, V)} d^3 v d^3 V = d^3 v d^3 V$$

であるから, 2粒子の速度分布関数は

$$\begin{aligned} N_1(v_1) N_2(v_2) d^3 v_1 d^3 v_2 \\ = n_1 n_2 \frac{(m\mu)^{3/2}}{(2\pi kT)^3} \exp\left\{-\frac{1}{2kT} [mV^2 + \mu v^2]\right\} d^3 v d^3 V \end{aligned} \quad (4.1)$$

となる。いま σ は相対速度 v のみの関数だから式(4.1)を V で積分すると

$$\begin{aligned} I_{12} &= \mu^{3/2} \frac{n_1 n_2}{(2\pi kT)^{3/2}} \int \sigma(v) v \exp\left(-\frac{\mu v^2}{2kT}\right) d^3 v \\ &= \int p(v) N(v) dv \end{aligned}$$

が得られる。ここで $p(v)$ は相対速度 v の二つの粒子の核反応率で

$$p(v) = v\sigma(v) \quad (4.2)$$

$N(v)$ は残りの項を表わす。

<トンネル効果と反応率>⁸⁾

原子核はおのおの $Z_1 e$, $Z_2 e$ の正電荷をもっている。そのために, クーロン斥力によって接近できず原子核同士が核力で反応する距離にはなかなか達しない。量子力学によれば, 核融合反応はクーロン障壁をトンネル効果でつき抜け, そして上の(4.2)の確率で反応し初めて陽子と陽子が融合すると考える。

トンネル効果によるクーロンポテンシャルの透過率 P_{coul} を求めてみる。

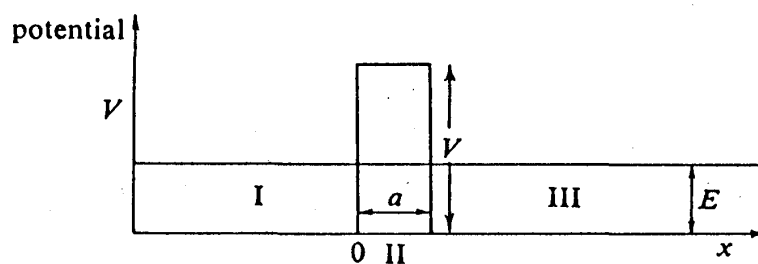


Figure 4.4 A barrier of thickness a , corresponding to the potential energy V . The solutions of Eq. (4.3) for the zones I, II, and III are given in the text.

EMILIO SEGRÈ NUCLEI and PARTICLES

THE BENJAMIN/CUMMINGS PUBLISHING COMPANY

シュレーディンガーが一方の式

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) u = 0 \quad (4.3)$$

I, II, III のゾーンでは, それぞれの解は以下の様になる。

$$u_I = A_I e^{ikx} + B_I e^{-ikx} \quad -\infty < x < 0$$

$$u_{II} = A_{II} e^{kx} + B_{II} e^{-kx} \quad 0 < x < a$$

$$u_{III} = A_{III} e^{ikx} + B_{III} e^{-ikx} \quad a < x < \infty$$

ここで

$$k = \frac{(2mE)^{1/2}}{\hbar} = \frac{P}{\hbar} = \frac{1}{\lambda}$$

$$K = \frac{(2m(E-V))^{1/2}}{\hbar}$$

Pは運動量, λ はド・ブローイ波長

A, Bを以下の様に決める。

$$u, u' = \frac{du}{dx}$$

は連続である事が量子力学から言える。そして, III の領域において右方向へ動く粒子のみを考える。つまり

$$B_{III} = 0$$

$x = a$ の地点において

$$\begin{cases} A_{III} e^{ika} = A_{II} e^{ka} + B_{II} e^{-ka} \\ ikA_{III} e^{ika} = K(A_{II} e^{ka} - B_{II} e^{-ka}) \end{cases}$$

これより

$$\begin{cases} A_{II} = \frac{A_{III}}{2} \left(1 + \frac{ik}{K}\right) e^{(ik-K)a} \\ B_{II} = \frac{A_{III}}{2} \left(1 - \frac{ik}{K}\right) e^{(ik+K)a} \end{cases}$$

$x = 0$ の地点において

$$\begin{cases} A_I + B_I = A_{II} + B_{II} \\ ik(A_I - B_I) = K(A_{II} - B_{II}) \end{cases}$$

A_I は入射波の振幅, B_I は反射波の振幅, A_{III} は透過波の振幅, $Ka \gg 1$ のとき B_{II} に比べると A_{II} は無視できる。

$$B_I = \frac{B_{II}}{2} \left(1 + \frac{K}{ik}\right)$$

$$2A_I = 2(B_{II} - B_I)$$

$$= \frac{A_{III}}{2} \left(1 - \frac{ik}{K}\right) \left(1 - \frac{K}{ik}\right) e^{(ik+K)a}$$

比

$$\frac{|A_{III}|^2}{|A_I|^2} = \left| 4 \frac{K}{K-ik} \frac{ik}{ik-K} e^{-(ik+K)a} \right|^2$$

$$= \frac{16k^2 K^2 e^{-2Ka}}{(k^2 + K^2)^2} \sim e^{-2Ka} = T \quad (4.4)$$

反射率

$$R = \frac{|B_I|^2}{|A_I|^2}$$

$R + T = 1$ の関係を満たす。

Transparency は式 (4.4) の一般形

$$T = \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_R^{r_1} (2m|E-V|)^{1/2} dx \right] = e^{-2G} \quad (4.5)$$

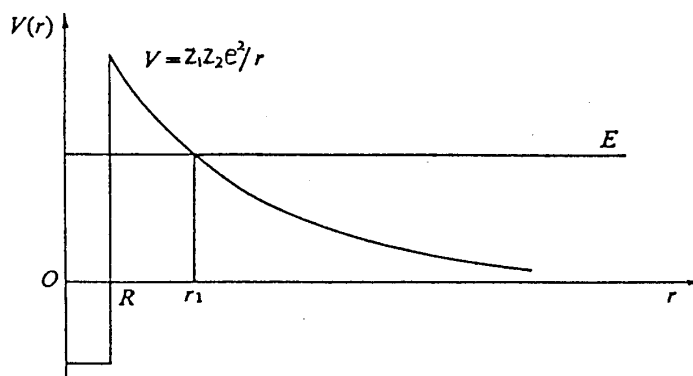


Figure 4.5 Electrostatic potential energy of an alpha particle as a function of the distance from the center of the nucleus.

EMILIO SEGRÈ NUCLEI and PARTICLES

THE BENJAMIN/CUMMINGS PUBLISHING COMPANY

$$V = Z_1 Z_2 e^2 / r$$

この積分を $E - V < 0$ の範囲に適用する。(古典力学では禁止されている範囲)角運動量のない3次元のクーロンポテンシャルは

$$V = Z_1 Z_2 e^2 / r$$

運動エネルギーは

$$E = Z_1 Z_2 e^2 / r_1$$

また、障壁の高さは

$$B = Z_1 Z_2 e^2 / R$$

式(4.5)のGを計算すると

$$\begin{aligned} G &= \frac{(2m)^{1/2}}{\hbar} \int_R^{r_1} \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_1} \right)^{1/2} dr \\ &= \frac{(2m Z_1 Z_2 e^2 r_1)^{1/2}}{\hbar} \left[\arccos \left(\frac{R}{r_1} \right)^{1/2} - \left(\frac{R}{r_1} - \frac{R^2}{r_1^2} \right)^{1/2} \right] \end{aligned}$$

$x = R/r_1 = E/B$, $v = (2E/m)^{1/2}$ を使って書き替えると

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{\hbar} (2m Z_1 Z_2 e^2)^{1/2} \left(\frac{BR}{E} \right)^{1/2} \left[\arccos (x^{1/2}) - x^{1/2} (1-x)^{1/2} \right] \\ &= \frac{2 Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} \gamma(x) \end{aligned}$$

$\gamma(x) = \arccos(x^{1/2}) - x^{1/2}(1-x)^{1/2}$ の関数は Bethe, Perlman Rasmussen によって計算され、表が出来ている。

$x \ll 1$ の場合

$$\gamma(x) \sim (1/2)\pi - 2x^{1/2} + \dots \quad \text{と近似される。}$$

$$x = E/B = R/r_1 \ll 1 \text{ なので}$$

$$\begin{aligned} G &\simeq \frac{2 Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} \left(\frac{\pi}{2} - 2x^{1/2} + \dots \right) \\ &= \frac{\pi Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} - \frac{Z_1 e}{\hbar} (2 Z_1 Z_2 m R)^{1/2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

粒子がポテンシャルの壁の内側に入ってから速さ v で動き、 $2R/v$ (回/sec) で壁に衝突すると仮定して核の崩壊定数を transparency から求める。それぞれの衝突につき T の確率で漏れて行くとすると

$$P = \frac{2R}{v} e^{-2G} \quad (v \sim \sqrt{E})$$

式(4.6)の第一項のみをとると、トンネル効果によるクーロンポテンシャルの透過率 P_{coul} は

$$P_{\text{coul}} \propto e^{-\frac{2\pi Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}} / \sqrt{E}$$

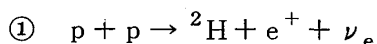
また、透過しても必ずしも核反応をおこすとは限らず、その確率を P_{nucl} とすると、反応断面積は

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{P_{\text{coul}} P_{\text{nucl}}}{v} = \frac{S(E)}{E} e^{-2\pi\eta} \\ \eta &= \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} \end{aligned}$$

ここで $S(E)$ はクーロン障壁の効果を除いた核反応の効果を表わすもので $\sigma(E)$ の実験値から $S(E) = \sigma E e^{2\pi\eta}$ によって決められる。

Bahcall の Standard Solar Model を考える時も、この $S(E)$ を求める事によってニュートリノの数を見積っている。

主な核融合反応について



中性子の寿命と ${}^+0 \rightarrow {}^+0$ の遷移 (${}^{14}\text{O}$) を測定し、ハミルトニアン

$$H_\beta = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\psi}_p r^\mu (G_V - G_A r^5) \psi_n] \times [\bar{\psi}_e r^\mu (1 - r^5) \psi_{\nu_e}]$$

の G_V (vector coupling constant) と G_A (axial vector coupling constant) を求める。

そこから反応率を求める。2種の陽子数密度は Maxwell-Boltzmann 分布をしていて、それぞれ $\phi(E_1)$, $\phi(E_2)$ とすると

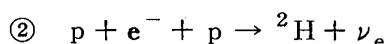
$$w = \frac{2\pi}{\hbar v} \sum_{\text{spins}} \int d^3 n_{p_1} d^3 n_{p_2} \phi(E_1) \phi(E_2) d^3 n_e d^3 n_\nu d^3 n_d \delta(E_i - E_f) |\langle f | H_\beta | i \rangle|^2$$

ここで $d^3 n_i = [V / (2\pi\hbar)^3] d^3 p_i$

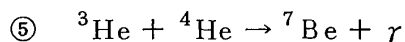
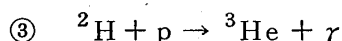
$\langle f | H_\beta | i \rangle$ は β -decay Hamiltonian の行列要素

$$w = \left(\frac{N_p^2}{2} \right) \langle \sigma v \rangle$$

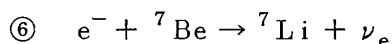
(N_p は陽子の数密度で、重心系の Maxwell-Boltzmann 分布について平均をとっている。)



反応率は、①の反応率に比例している。

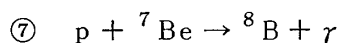


実験 (Griffiths, Lal, Scarfe 1963) により、この反応の cross section が求まっており、extrapolation (補外法) により低エネルギー (太陽) の条件に合わせて cross section を決める。



星の内部でこの反応の起こる率は (Bahcall and Moeller 1969) 10^6 degrees Kelvin を T_6 として $\lambda = 4.62 \langle B \rangle 10^{-9} (\rho/\mu_e) T_6^{-1/2} \times [1 + 0.004 (T_6 - 16)] \text{sec}^{-1}$

(μ_e は電子の平均質量, ρ は密度, $\langle B \rangle$ は反跳電子による連続した捕獲率の enhancement) $\langle B \rangle$ は実験で測定されている。

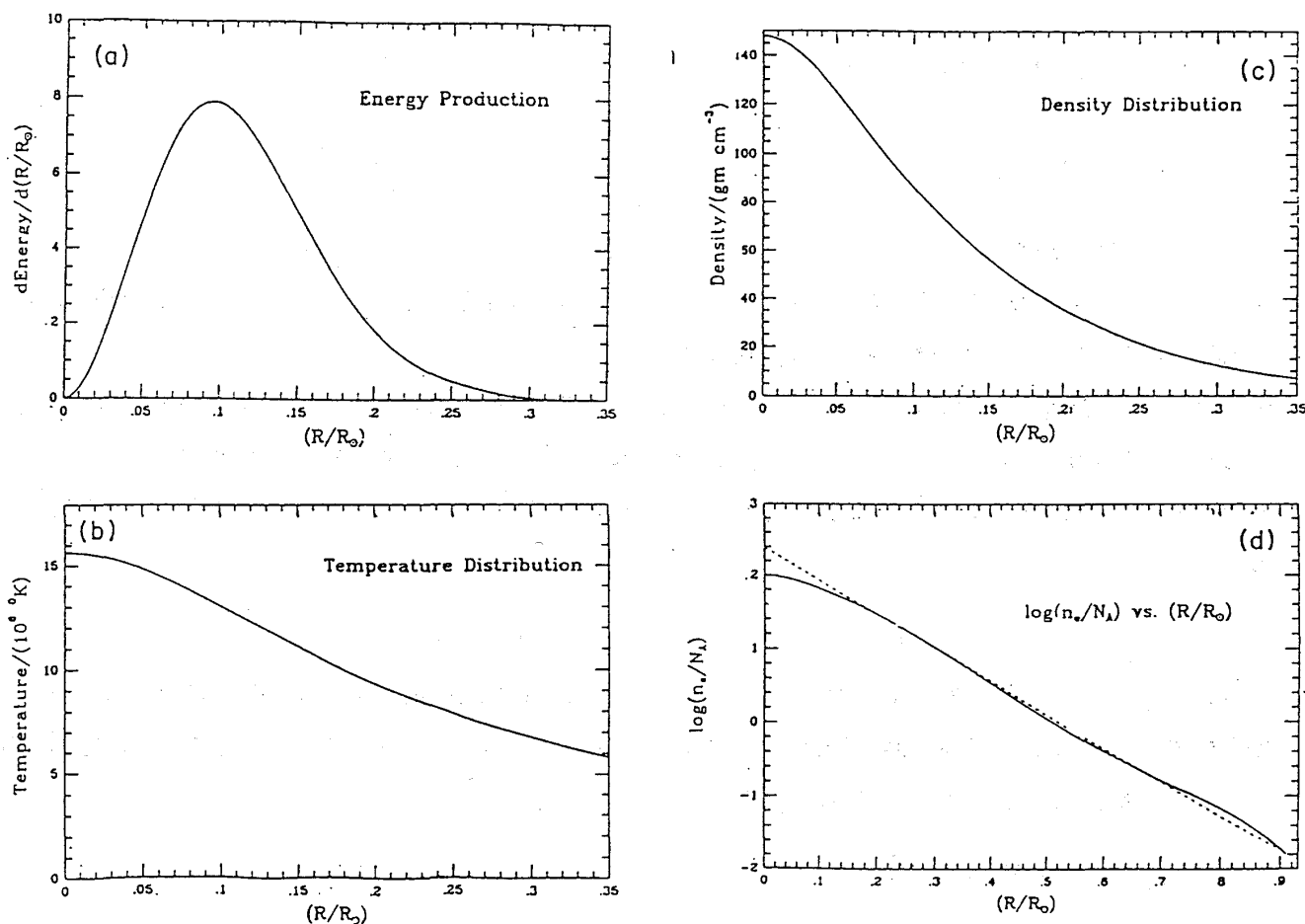


${}^{37}\text{Cl}$ の太陽ニュートリノ実験に対する計測数の予想値の 2/3 以上は、この反応の後に起こる ${}^8\text{B}$ の

β -decay から出て来るものであり、とても稀にしか起こらない。

^8B の β -decay からのニュートリノフラックスは ^2H , ^7Li , 電子-ニュートリノ散乱の実験における捕獲率から求められる。 ^7Be の崩壊でできた ^7Li をターゲットにして $^7\text{Li} + d \rightarrow ^8\text{Li} + p$ 反応について反応断面積を測定する。そこから ⑦ の反応について断面積を求める。(Brook-haven, Caltech) SSM による計算結果は、FIGURE 4.6⁹⁾

FIGURE 4.6
Reviews of Modern Physics
1988 Vol. 60 No. 2 P297
John N. Bahcall Roger K. Ulrich



SSM の不確定なものとして、第一に挙げられるものが opacity (不透明度) である。opacity は太陽の構成成分や、核反応の過程によって決まり、これの決定から一番誤差が出やすい。第二に挙げられるのが ^8B の反応確率の太陽中心温度に対する依存性 ($\sim T^{10}$) である。

しかし、陽震学の発達などにより Standard Solar Model はほとんど間違っていないとされている。

5章 真空中でのニュートリノ振動^{2), 10), 11), 12)}

^{37}Cl , 神岡の実験と理論からの捕獲率の食い違いを説明するものとして、ニュートリノ振動が考えられる。これは、 ν_e として生成されたものが、太陽から地球に到達するまでに観測不可能な ν_μ , ν_τ に変わ

ってしまう事である。

まず始めに、真空中でのニュートリノ振動を考えてみよう。

弱い charged current 相互作用で e, μ, τ と couple するニュートリノの状態は、それぞれ ν_e, ν_μ, ν_τ で、これを cc 固有状態と呼ぼう。これらは、ニュートリノが生成されるときに直交基底である。

しかしながら、ニュートリノの propagation (伝播) についての直交基底は質量の固有状態で、これを ν_1, ν_2, ν_3 と書く。これらは一般にユニタリー変換で ν_e, ν_μ, ν_τ の線形結合で表わされる。

$$\left(\begin{array}{l} \text{c. c 固有状態を } \nu_\alpha, \nu_\beta \dots \text{ とおく} \\ \text{質量固有状態を } \nu_i, \nu_j \dots \text{ とおく} \end{array} \right)$$

$$|\nu_\sigma\rangle = \sum_j U_{\alpha j} |\nu_j\rangle$$

$$|\nu_j\rangle = \sum_\alpha U_{j\alpha}^\dagger |\nu_\alpha\rangle$$

なぜユニタリー変換か。

- ① ユニタリー変換はベクトルの大きさを変えない。よって確率の保存が成り立つ。ベクトルの要素が複素数の場合、大きさを変えない変換はユニタリー変換のみ。
- ② エルミート行列 (物理量はエルミートである) をユニタリー変換したものもまた、エルミート行列である。
もし、3種の mass が等しければ、それぞれを任意に ν_e, ν_μ, ν_τ と選べる。(すなわち $U=1$, mixing なし) しかし一般に $U \neq 1$ 相対論的なニュートリノを仮定する。ニュートリノは光速で走ると仮定する。

$$E \simeq p \gg m \quad x \simeq t \quad (c = \hbar = 1 \text{ とする})$$

ν_1, ν_2, ν_3 の質量が異なるので、momentum vector (運動量) P_j もわずかに異なる。よって、検出器までの間に ν_j の波動関数はそれぞれ異なった phase factor $e^{-ip_j x}$ を持つ。これらの線形結合は、もはや最初に作られた ν_α ではない。

$$\begin{aligned} |\nu_\alpha\rangle &\longrightarrow \sum_j U_{\alpha j} e^{-ip_j x} |\nu_j\rangle \\ &\longrightarrow \sum_\beta \left\{ \sum_j U_{\alpha j} U_{j\beta}^\dagger e^{-ip_j x} \right\} |\nu_\beta\rangle \end{aligned}$$

※ { } 内は ν_α から ν_β へと変化する遷移の振幅。確率はこの2乗。

時間推進 $e^{-iH\Delta t}$, 空間推進 $e^{iP \cdot \Delta x}$ の両方を考えると、x 方向に進む場合の phase factor は、

$$\begin{aligned} &\exp(ipx - iEt) \\ &= \exp(i\sqrt{E^2 - m_j^2} x - iEt) \\ &\simeq \exp\left\{ iEx \left(1 - \frac{1}{2} \frac{m_j^2}{E^2}\right) - iEt \right\} \end{aligned}$$

ニュートリノが ℓ だけ進むと

$$\exp \{ i E \ell - i E t - i m_j^2 \ell / 2 E \}$$

共通の phase をとり除くと ν_j の phase は $\exp(-i m_j^2 \ell / 2 E)$

m_j : ν_j の質量

ℓ : source から detector までの距離

E : ニュートリノのエネルギー

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \left| \sum_j U_{\alpha j} U_{j\beta}^\dagger \exp\left(-i \frac{m_j^2 \ell}{2 E}\right) \right|^2$$

このように純粋な ν_e が ν_μ , ν_τ になり得る。すると ν_e として相互作用する確率が減る。これが真空中でのニュートリノ振動である。

単純な 2 つのニュートリノの mixing は,

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$$

mixing matrix U_{ij} のパラメーターは θ のみ。 $\delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$ とおくと ν_τ が mix されない限り遷移確率は $U_{ab}^\dagger = U_{ba}^*$ である事を用いて

$$\begin{aligned} P(\nu_e \rightarrow \nu_e) &= \left| \sum_j U_{ej} U_{ej}^* \exp\left(-i \frac{m_j^2 \ell}{2 E}\right) \right|^2 \\ &= \left| \cos^2 \theta e^{-i m_1^2 \ell / 2 E} + \sin^2 \theta e^{-i m_2^2 \ell / 2 E} \right|^2 \\ &= \left| \cos^2 \theta + \sin^2 \theta e^{-i \delta m^2 \ell / 2 E} \right|^2 \\ &= \cos^4 \theta + \sin^4 \theta + \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \cdot \cos(\delta m^2 \ell / 2 E) \\ &= 1 - \sin^2 2\theta \cdot \sin^2\left(\frac{1}{4} \delta m^2 \ell / E\right) \end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned} P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) &= P(\nu_e \rightarrow \nu_e) \\ P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) &= \sin^2 2\theta \cdot \sin^2\left(\frac{1}{4} \delta m^2 \ell / E\right) \\ &= P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) \end{aligned}$$

ここでは、ニュートリノのエネルギー E が一定で P_j の差によって干渉するとして計算したが、 P が一

定で $E_j = \sqrt{p^2 + m_j^2}$ の差によって干渉すると考える事もできる。¹⁰⁾

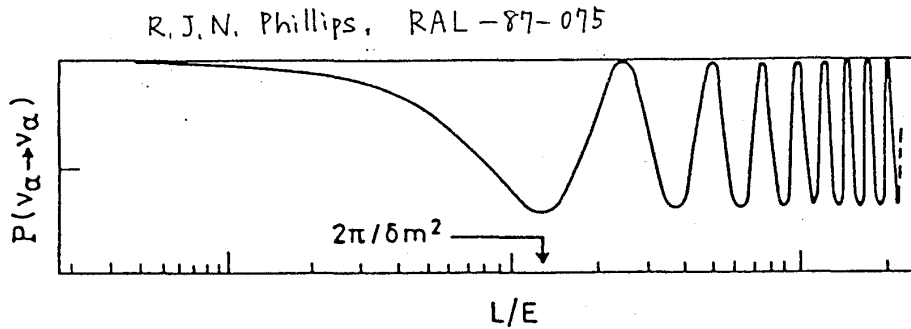


FIGURE 5.1 Typical oscillating transition probability.

- (a) $\frac{\ell}{E} \ll \frac{2\pi}{\delta m^2}$ のとき mixing はない
- (b) $\frac{\ell}{E} \simeq \frac{2\pi}{\delta m^2}$ のとき最初の最もはっきりした振動
- (c) $\frac{\ell}{E} \gg \frac{2\pi}{\delta m^2}$ のとき source や detector の大きさが, ℓ (source と detector の間の距離) よりずっと小さければ, ニュートリノ振動は平均化される。(実際には, ν_1 と ν_2 は異なった mass と速度をもっているため, source や detector の大きさにかかわらず, これらの波束が重なり合えなくなり, 干渉がなくなる)

しかし, 大きな mixing は簡単には生じない。quark sector の mixing angle は Cabibbo angle ($\sin^2 2\theta_c = 0.2$) 程度であり, ニュートリノ振動の θ はこれより小さいだろうと考えられている。 δm^2 については, 直接には何も分かっていない。 $m(\nu_e) \simeq m_1$ の上限は約 20 eV である。

ニュートリノ振動を地球上で実験するのは無駄だと考えられている。何故なら, $\sin^2 2\theta = 0.2$ のオーダーの mixing は原子炉の実験では $\delta m^2 < 0.04 \text{ eV}^2$ でなければ除かれるのである。

6章 物質中でのニュートリノ振動 — 断熱的な場合

ここでは, 物質の効果を含めたニュートリノ振動を考える。まず, 断熱的(ニュートリノが, 共鳴領域をゆっくり通過する)な場合についての, H. A. Bethe¹³⁾ の方法を紹介する。

真空中と同様に, ニュートリノの flavor を 2 つだけ (ν_e, ν_μ) 考える。 ν_τ については, 後で論じる。 $\theta < 45^\circ$ と仮定する。

$$\begin{aligned} |\nu_e\rangle &= |\nu_1\rangle \cos \theta + |\nu_2\rangle \sin \theta \\ |\nu_\mu\rangle &= -|\nu_1\rangle \sin \theta + |\nu_2\rangle \cos \theta \end{aligned} \quad (6.1)$$

質量の固有状態に対する, 質量の 2 乗を与える mass matrix を M' とおくと

$$\hat{H}' \begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \end{pmatrix} = M' \begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \end{pmatrix}$$

$$M' = \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 \\ 0 & m_2^2 \end{pmatrix}$$

flavor の固有状態に対する mass matrix を M とおくと

$$\begin{aligned} \hat{H}' \begin{pmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_\mu\rangle \end{pmatrix} &= M \begin{pmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_\mu\rangle \end{pmatrix} \\ M &= \begin{pmatrix} \langle \nu_e | \hat{H}' | \nu_e \rangle & \langle \nu_\mu | \hat{H}' | \nu_e \rangle \\ \langle \nu_e | \hat{H}' | \nu_\mu \rangle & \langle \nu_\mu | \hat{H}' | \nu_\mu \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} M' \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{2} (m_2^2 - m_1^2) \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wolfenstein¹⁴⁾ は、物質中で弱い相互作用の結果として質量が変わることを指摘した。neutral current は ν_e と ν_μ に等しく作用するので、私達の目的には重要でない。しかし、太陽の中には e^- が存在し、 μ^- は存在しないと考える。そのような媒質の中では charged current は ν_μ には何の効果もないが、 ν_e とは相互作用する。(charged current は ν_e と電子に couple する) この相互作用は $H_{\text{interaction}}$ を与える。

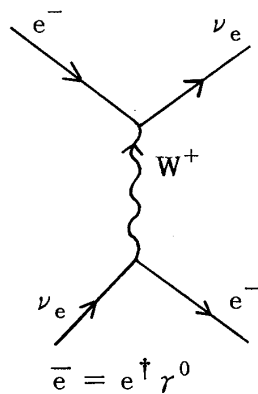
$$H_{\text{int.}} = \frac{G}{\sqrt{2}} [\bar{e} r^\lambda (1 - r_5) e] [\bar{\nu}_e r_\lambda (1 - r_5) \nu_e] \quad (6.3)$$

G : 弱い相互作用の Fermi Constant

$$r^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$r^{1\sim 3} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma : \text{パウリのスピ行列}$$

$$r_5 = i r^0 r^1 r^2 r^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



電子は ν_e より重いので静止していると考え、 $\lambda = 0$ の項のみが残る。

また、ニュートリノは左巻きのみなので

$$\gamma_5 \nu_e = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{P}|} \nu_e = -\nu_e$$

$$(1 - \gamma_5) \nu_e = 2 \nu_e$$

以上より (6.3) は、 ν_e に対するポテンシャル

$$V = \sqrt{2} GN \quad (6.4)$$

に等しい。

N : 単位体積あたりの電子の数

k : ν_e のモーメンタム

m : ν_e の静止質量

E : ν_e の全エネルギー

本来なら $k^2 + m^2 = E^2$ となるはずだが、charged current によってポテンシャル V が生じたために

$$\begin{aligned} k^2 + m^2 &= (E - V)^2 \\ &\simeq E^2 - 2EV \end{aligned} \quad (6.5)$$

$2EV$ を、 m^2 に加わった m_i^2 と考えて、mass matrix M へ ν_e にのみ寄与するように加える。

$$\begin{aligned} m_i^2 &= 2EV = 2\sqrt{2} GNE \\ &= 2\sqrt{2} G \frac{\rho}{m_n} Y_e E \\ &= A \end{aligned} \quad (6.6)$$

m_n : 核子の質量

Y_e : 物質中の 1 核子あたりの電子の数

ρ : 物質の密度

ここで $\delta_m^2 \equiv m_2^2 - m_1^2$, $\delta_m^2 > 0$ と仮定する。

$$M = \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2 + A) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A - \delta_m^2 \cos 2\theta & \delta_m^2 \sin 2\theta \\ \delta_m^2 \sin 2\theta & -A + \delta_m^2 \cos 2\theta \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

よって質量の2乗の固有値は

$$m_\nu^2 = \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2 + A) \pm \frac{1}{2} [(\delta_m^2 \cos 2\theta - A)^2 + \delta_m^2 \sin^2 2\theta]^{1/2} \quad (6.8)$$

2つの固有値の差は、 A の関数として最小値をもつ。最小となるのは

$$A = \delta_m^2 \cos 2\theta \quad (6.9)$$

のときである。

m_ν^2 を縦軸, ρ を横軸にとると, 図6.1。

もし coupling term $\delta_m^2 \sin^2 2\theta$ がなければ, 2つの曲線は交わる。交点近くの(6.9)の時が共鳴である。

ν_e は, 太陽の中の $A > \delta_m^2 \cos 2\theta$ であるような十分に高い密度のところでは生成されたと仮定する。ニュートリノが外へ移動するにつれて(6.6)より A が減り, ついに共鳴(6.9)となる。 ν_e の質量が図6.1の上の点線をたどれば, 太陽から ν_μ として出てくる。これが, 断熱的な場合のニュートリノ振動である。

実際に数値を計算してみる。

$$(6.6) \text{ で } Y_e = \frac{1}{2} \text{ とすると}$$

$$A = 0.76 \times 10^{-7} \rho E \quad (6.10)$$

$$\rho \text{ [g/cm}^3\text{]} \quad E \text{ [MeV]} \quad A \text{ [eV]}$$

$\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ の断熱的ニュートリノ振動が, 太陽からのニュートリノの観測値を減少させる唯一の原因だと仮定する。

(6.9), (6.10) より, E がどんな値でも共鳴は密度 ρ_E で起こり

$$E \rho_E = 1.3 \times 10^7 \delta_m^2 \cos 2\theta \equiv A \quad (6.11)$$

R. J. N. Phillips, RAL-87-075

SOLAR NEUTRINOS

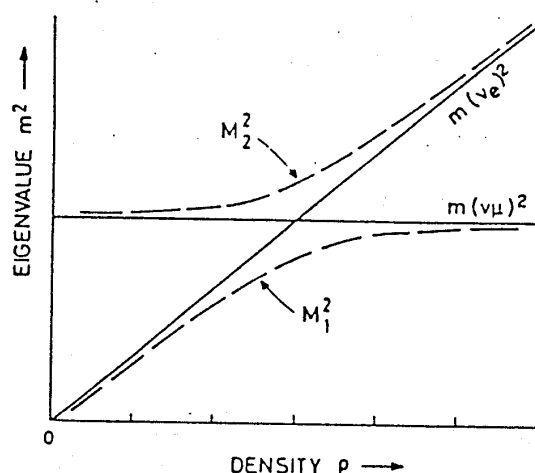


FIGURE 6.1 Level crossing diagram for two neutrinos

critical energy E_c は

$$E_c = A/\rho_c$$

ρ_c : 太陽中心の密度

$E < E_c$ のニュートリノは, 共鳴を通らずに ν_e のまま現れる。これは, Davis ら¹⁾ は E_c より小さいエネルギーの太陽ニュートリノだけを観測していることを意味する。

E_c は実験から決める。

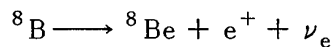
^{37}Cl によって検出できるニュートリノは, Bahcall らの計算値⁴⁾ を用いると

- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } ^8\text{B から } 4.3 \text{ SNU} \\ \quad \text{この } \nu_e \text{ は } 14.0 \text{ MeV までの連続スペクトルをもつ。} \\ \text{(ii) 他のすべてから (pep, } ^7\text{Be, } ^{13}\text{N, } ^{15}\text{O) } 1.6 \text{ SNU} \\ \quad \text{この } \nu_e \text{ は最大エネルギーが } 2.8 \text{ MeV なので, } E_c \text{ 以下であり全部検出できると考える。} \end{array} \right.$$

Davis らが観測した ν_e は $2.1 \pm 0.3 \text{ SNU}$ である。(ii) の分を引くと, ^8B からの ν_e の観測率 $F(^8\text{B})$ は

$$F(^8\text{B}) = (12 \pm 12)\% \quad (6 \cdot 12)$$

^8B はすべての可能な遷移において



のように崩壊すると仮定する。

それぞれの運動量を

$$P_1 = P_2 + P_e + P_\nu$$

と書く。

$$\begin{aligned} H_{fi} &= \int_V d^3x \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-iP_2x} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-iP_e x} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-iP_\nu x} G \frac{1}{\sqrt{V}} e^{iP_1x} \\ &= \frac{G}{V} \delta_{P_1, P_2 + P_e + P_\nu} \end{aligned}$$

単位時間あたりの遷移確率 w_{fi} は

$$w_{fi} = 2\pi \frac{G^2}{V^2} \sum_{\text{final state}} (\delta_{P_1, P_2 + P_e + P_\nu})^2 \delta(E_1 - E_2 - E_e - E_\nu)$$

$$\text{ここで } \sum_{\text{final state}} (\delta_{P_1, P_2 + P_e + P_\nu})^2$$

$$= \sum_{P_2} \frac{V}{(2\pi)^3} d^3P_e \frac{V}{(2\pi)^3} d^3P_\nu$$

であるから P_2 を積分して

$$w_{fi} = \frac{G^2}{(2\pi)^5} \int d^3 P_e d^3 P_\nu \delta(E_1 - E_2 - E_e - E_\nu)$$

$$\text{ここで } d^3 P_e = 4\pi P_e^2 dP_e$$

$$= 4\pi P_e E_e dE_e$$

$$d^3 P_\nu = 4\pi P_\nu^2 dP_\nu$$

であるから

$$w_{fi} = \frac{G^2}{2\pi^2} \int dP_\nu P_\nu^2 P_e E_e$$

P_ν が最大となるのは, $P_e = 0$ のとき。このとき

$$P_\nu^{\max} = E_1 - E_2 - m_e$$

また

$$P_e = \sqrt{(m_e + P_\nu^{\max} - P_\nu)^2 - m_e^2}$$

$$w_{fi} = \frac{G^2}{2\pi^3} \int dP_\nu P_\nu^2 \sqrt{(m_e + P_\nu^{\max} - P_\nu)^2 - m_e^2} (m_e + P_\nu^{\max} - P_\nu)$$

ここで $m_e \sim 0.5 \text{ MeV}$ を 0 とみなすと ν_e のスペクトル $I(P_\nu)$ は

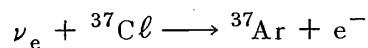
$$I(P_\nu) = \frac{G^2}{2\pi^3} P_\nu^2 (P_\nu^{\max} - P_\nu)^2$$

$$\propto x^2 (1-x)^2$$

(6.13)

$$x \equiv \frac{P_\nu}{P_\nu^{\max}}$$

次に, ^{37}Cl の実験でニュートリノを検出する確率を考える。



それぞれの運動量を

$$P_\nu + P_1 = P_2 + P_e$$

と書く。

単位時間あたりの遷移確率 w_{detect} は

$$w_{\text{detect}} = 2\pi \frac{G^2}{V^2} \sum_{\text{final state}} (\delta_{P_\nu + P_1, P_2 + P_e})^2 \delta(E_\nu + E_1 - E_2 - E_e)$$

ここで $\sum_{\text{final state}} (\delta_{P_\nu + P_1, P_2 + P_e})^2 = \sum_{P_2} \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 P_e$ であるから P_2 を積分して

$$\begin{aligned} w_{\text{detect}} &= \frac{G^2}{(2\pi)^2 V} \int d^3 P_e \delta(E_\nu + E_1 - E_2 - E_e) \\ &= \frac{G^2}{\pi V} P_e E_e \end{aligned}$$

$$\text{ここで } P_e = \sqrt{\{P_\nu + (E_1 - E_2)\}^2 - m_e^2}$$

^{37}Cl 実験の threshold energy ϵ_{th} は 0.82 MeV である。

もし $P_\nu \gg \epsilon_{\text{th}}$ ならば

$$\begin{aligned} E_e &= P_e \sim P_\nu \\ m_e &\text{を0とみなした} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} w_{\text{detect}} &= \frac{G^2}{\pi V} P_\nu^2 \\ &= \frac{G^2}{\pi V} (P_\nu^{\text{max}})^2 x^2 \end{aligned}$$

^{37}Cl 実験の散乱断面積 σ_{detect} は

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{detect}} &= \frac{G^2}{\pi} (P_\nu^{\text{max}})^2 x^2 \\ &\propto x^2 \end{aligned} \tag{6.14}$$

$$\text{ここで } x_1 \equiv \frac{\epsilon_{\text{th}}}{E_\nu^{\text{max}}} = 0.06$$

$$x_2 \equiv \frac{E_c}{E_\nu^{\text{max}}}$$

とおくと, (6.13), (6.14) より

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} x^4 (1-x)^2 dx &= F(^8\text{B}) \int_{x_1}^1 (1-x)^2 dx \\ &= F(^8\text{B}) \times 9.4 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

数値計算¹³⁾により $x_2 = 0.42$

$$E_c = 5.9_{-3}^{+1.1} \text{ MeV} \tag{6.15}$$

と決められる。

(6.11) から δ_m^2 を決めることができる。

Bachall からの Standard Solar Model により, ρ_c として ^8B 反応の半分を含む地域での太陽の密度 $\rho_c = 130 \text{ g/cm}^3$ をとる。すると

$$\delta_m^2 \cos 2\theta = 5.9 \times 10^{-5} \text{ eV}^2 \quad (6.16)$$

$m_1 = 0$ かつ $\cos 2\theta = 1$ と仮定すると

$$m_2 \simeq 0.008 \text{ eV} \quad (6.17)$$

δ_m^2 が (6.16) のように小さいと, この結果を実験で確認するのは難しい。

断熱的であるための条件

図 6.1 で, ニュートリノの質量が点線をたどるのは交点近くの物質の密度変化が断熱的な場合だけである。

共鳴のときの A のとり得る幅を, 共鳴の幅 Γ と考えると (6.7) によれば

$$\Gamma = 2 \delta_m^2 \sin 2\theta$$

共鳴では A が $\delta_m^2 \cos 2\theta - \frac{1}{2} \Gamma$ から $\delta_m^2 \cos 2\theta + \frac{1}{2} \Gamma$ までをとるので

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = \frac{\delta A}{A} = \frac{\Gamma}{\delta_m^2 \cos 2\theta} = 2 \tan 2\theta \quad (6.18)$$

r : 太陽中心からの距離

$$\delta r = 2 \left[-\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right]^{-1} \tan 2\theta \quad (6.19)$$

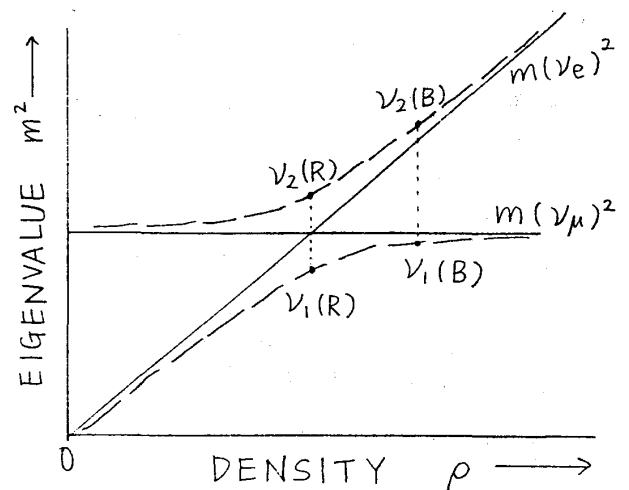
図 6.2 で, 共鳴点以外の位置を B, 共鳴点を R とする。 $\nu_2(B)$ を, $\nu_2(R)$ と $\nu_1(R)$ の混合状態と考える。

$$\begin{pmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_\mu\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta(r) & \sin \theta(r) \\ -\sin \theta(r) & \cos \theta(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_1(r)\rangle \\ |\nu_2(r)\rangle \end{pmatrix}$$

$\theta(r)$: 位置 r での mixing angle

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} |\nu_1(B)\rangle \\ |\nu_2(B)\rangle \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta(B) & -\sin \theta(B) \\ \sin \theta(B) & \cos \theta(B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_\mu\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta(B) & -\sin \theta(B) \\ \sin \theta(B) & \cos \theta(B) \end{pmatrix} \times \end{aligned}$$

FIGURE 6.2



$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \theta(R) & \sin \theta(R) & | \nu_1(R) \rangle \\ -\sin \theta(R) & \cos \theta(R) & | \nu_2(R) \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \{ \theta(B) - \theta(R) \} & -\sin \{ \theta(B) - \theta(R) \} \\ \sin \{ \theta(B) - \theta(R) \} & \cos \{ \theta(B) - \theta(R) \} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} | \nu_1(R) \rangle \\ | \nu_2(R) \rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

状態間の遷移確率 P は

$$P \{ \nu_2(B) \longrightarrow \nu_2(B) \} = 1 - \sin^2 2 \{ \theta(B) - \theta(R) \} \times \sin^2 \left\{ \frac{1}{4} \delta_m^2(R) \frac{L}{E} \right\}$$

$$P \{ \nu_2(B) \longrightarrow \nu_1(B) \} = \sin^2 2 \{ \theta(B) - \theta(R) \} \times \sin^2 \left\{ \frac{1}{4} \delta_m^2(R) \frac{L}{E} \right\}$$

L : 共鳴におけるニュートリノ振動の波長

断熱的な遷移では $P \{ \nu_2(B) \longrightarrow \nu_2(B) \} = 1$, $P \{ \nu_2(B) \longrightarrow \nu_1(B) \} = 0$ なので

$$\frac{1}{4} \delta_m^2(R) \frac{L}{E} = \pi$$

(6.8) より $\delta_m^2(R) = \delta_m^2 \sin 2\theta$ を用いて

$$L = \frac{4\pi E}{\delta_m^2 \sin 2\theta}$$

共鳴では (6.10) を用いて

$$L = \frac{4\pi E \times \rho}{A \tan 2\theta \times \rho} = \frac{4\pi \times 1.3 \times 10^7}{\rho \tan 2\theta} \quad (\text{cm}) \quad (6.20)$$

断熱的であるためには $\delta r \gg L$, つまり共鳴をゆっくり通過することが必要。(6.19) と (6.20) より, この条件は

$$\tan^2 2\theta \gg \frac{4\pi \times 1.3 \times 10^7}{2} \left[-\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dr} \right] = 0.8 \times 10^8 \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{\rho} \right] \quad (6.21)$$

Standard Solar Model によると

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{\rho} \right] = (0.8 \sim 2) \times 10^{-12} [\text{cm}^2/\text{g}] \quad (6.22)$$

(6.21) は $\theta > 0.0065$ ラジアン $= 0.4^\circ$

Gell-Mann, Ramond, Slansky,¹⁵⁾ 柳田¹⁶⁾ は, ニュートリノの質量と, 同じ flavor のクォークの質量を関係づけるシーソー・モデルを提案した。

M : superheavy mass

$$m(\nu_i) = \frac{m^2(q_i)}{M}$$

クォーク q_i を, 同じ flavor の荷電レプトンに置き換えると

$$\frac{m(\nu_\tau)}{m(\nu_\mu)} = \frac{m^2(\tau)}{m^2(\mu)} \simeq 300 \quad (6 \cdot 23)$$

これと (6.17) より $m(\nu_\tau) \simeq 2.5 \text{ MeV}$

$$\frac{m(\nu_\tau)}{m(\nu_e)} = \frac{m^2(\tau)}{m^2(e)} \simeq 1.22 \times 10^7 \quad (6 \cdot 24)$$

これと (6.24) より $m(\nu_e) \simeq 2.0 \times 10^{-7} \text{ eV}$, $m(\nu_e)$ は小さすぎて測定できない。(6.23) より,

$$M = \frac{m^2(q_\tau)}{m(\nu_\tau)} = \frac{(12 \text{ GeV})^2}{2.5 \text{ eV}} \\ \simeq 5.76 \times 10^{10} \text{ GeV}$$

これは, 大統一理論からの $M \simeq 10^{14} \text{ GeV}$ より小さい。

$\nu_e \leftrightarrow \nu_\tau$ 共鳴が起こるときの, 物質の密度 ρ を求める。

$$\delta_m^2(\nu_\tau, \nu_e) = m_{\nu_\tau}^2 - m_{\nu_e}^2 \simeq m_{\nu_\tau}^2 = 6.25 (\text{eV})^2 \\ \simeq 10^5 \times \delta_m^2(\nu_\mu, \nu_e)$$

(6.11) より, $\rho_E(\nu_\tau, \nu_e) \simeq 10^5 \times 10^2 = 10^7 \text{ g/cm}^3$

ここで, $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$ 共鳴の $\rho_E(\nu_\mu, \nu_e) \simeq 10^2$ とした。

太陽中心の密度は $\sim 10^2 \text{ g/cm}^3$ なので, 太陽ニュートリノについては $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$ 共鳴だけを考えればよいことがわかる。しかし, 高密度の超新星から出たニュートリノは, まず $\rho = 10^7 \text{ g/cm}^3$ のところで $\nu_e \leftrightarrow \nu_\tau$ 共鳴があり, 次に $\rho = 10^2 \text{ g/cm}^3$ のところで $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$ 共鳴が起こる。

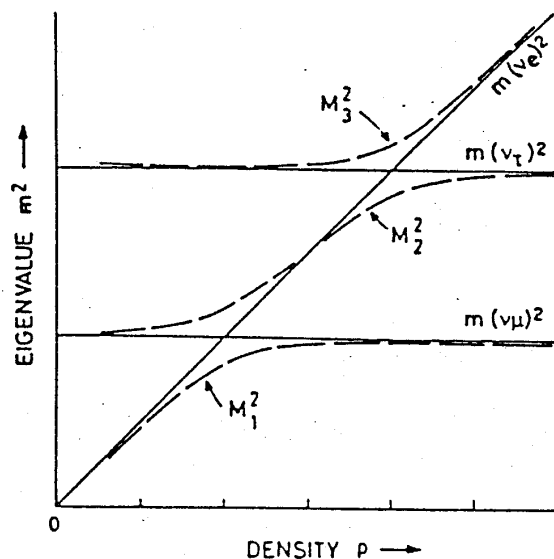


FIGURE 6.3 Level crossing diagram for three neutrinos

R. J. N. Phillips, RAL-87-075

m_i^2 を mass matrix に加える方法を用いず, 物質の屈折率を用いて全く同じ結果を導くこともできる。²⁾ 計算は複雑になる。

7章 物質中でのニュートリノ振動 — 非断熱的な場合

非断熱的な場合について, Stephen J. Parke¹⁷⁾ の方法を紹介する。

ニュートリノの状態は, 2つの flavor $|\nu_e\rangle$ と $|\nu_\mu\rangle$ の線形結合で表わされるとする。

$$|\nu, t\rangle = C_e(t) |\nu_e\rangle + C_\mu(t) |\nu_\mu\rangle \quad (7.1)$$

$$\Delta_0 \equiv (m_2^2 - m_1^2)/2k$$

θ_0 : 真空中での mixing angle

flavor を基底にとり, 共通の phase factor にのみ寄与する項を除いてシュレーディンガー方程式を書くと

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} C_e \\ C_\mu \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\Delta_0 \cos 2\theta_0 + \sqrt{2} GN & \Delta_0 \sin 2\theta_0 \\ \Delta_0 \sin 2\theta_0 & \Delta_0 \cos 2\theta_0 - \sqrt{2} GN \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} C_e \\ C_\mu \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

これは (6.7) と同じことである。

$\Delta_0 > 0$ と $\theta_0 < 45^\circ$ を仮定する。

電子密度 N のときの, 物質中での質量の固有状態を

$$|\nu_1, N\rangle = \cos \theta_N |\nu_e\rangle - \sin \theta_N |\nu_\mu\rangle \quad (7.3)$$

$$|\nu_2, N\rangle = \sin \theta_N |\nu_e\rangle + \cos \theta_N |\nu_\mu\rangle$$

θ_N : 物質中での mixing angle

と書く。これは (6.1) と同じ。

(7.2) で $|\nu_1, N\rangle, |\nu_2, N\rangle$ の固有値 λ は

$$\lambda = \pm \frac{1}{2} [(\Delta_0 \cos 2\theta_0 - \sqrt{2} GN)^2 + \Delta_0^2 \sin^2 2\theta_0]^{\frac{1}{2}}$$

ここで

$$\Delta_N = [(\Delta_0 \cos 2\theta_0 - \sqrt{2} GN)^2 + \Delta_0^2 \sin^2 2\theta_0]^{\frac{1}{2}} \quad (7.4)$$

とおくと,

$$|\nu_1, N\rangle \text{の固有値は} -\frac{\Delta_N}{2}$$

$$|\nu_2, N\rangle \text{の固有値は} \frac{\Delta_N}{2}$$

これより

$$\Delta_0 \sin 2\theta_0 = \Delta_N \sin 2\theta_N \quad (7.5)$$

電子密度を一定とすれば、興味がある領域が3つある。

$$(i) \text{ 共鳴の充分下 } \sqrt{2} GN \ll \Delta_0 \cos 2\theta_0$$

$$(7.4) \text{ より } \Delta_N \simeq \Delta_0$$

$$\text{これと (7.5) より } \theta_N \simeq \theta_0$$

$$(ii) \text{ 共鳴 } \sqrt{2} GN = \Delta_0 \cos 2\theta_0$$

$$(7.4) \text{ より } \Delta_N = \Delta_0 \sin 2\theta_0$$

$$\text{これと (7.5) より } \theta_N = \frac{\pi}{4}$$

$$(iii) \text{ 共鳴の充分上 } \sqrt{2} GN \gg \Delta_0 \cos 2\theta_0$$

$$\sqrt{2} GN \gg \Delta_0 \sin 2\theta_0 \text{ とみなせるから,}$$

$$(7.4) \text{ より } \sqrt{2} GN \gg \Delta_N \sin 2\theta_N$$

$$(7.5) \text{ より } \Delta_N \simeq \sqrt{2} GN$$

$$\text{よって } \theta_N \simeq \frac{\pi}{2}$$

ν_e を検出する場所の密度は、 ν_e が生成される太陽内部の密度よりはるかに小さいので、真空とみなせる。
 ν_e が共鳴の上で作られ、共鳴領域を通過して真空中で検出される確率を計算しよう。

電子密度がゆっくり変われば、ニュートリノは断熱的な状態

$$\exp\left(-i \frac{1}{2} \int^t \Delta_N dt\right) |\nu_1, N(t)\rangle$$

$$\exp\left(+i \frac{1}{2} \int^t \Delta_N dt\right) |\nu_2, N(t)\rangle$$

にある。

遷移がない領域（共鳴領域から離れたところ）では、これら2つの状態が基底状態である。

しかし、ニュートリノが共鳴領域を通過するとき、これらの断熱的な状態が混ざるかもしれない。共鳴を通過した後のニュートリノの状態は、これら断熱的な状態の線形結合で表されると考える。これが、非断熱的な考え方である。

時刻 t で基底状態が作られ、時刻 t_r で共鳴が起こり、時刻 t' で検出されるとする。

$$\begin{aligned}
|\nu_1, N(t_r)\rangle &= \exp\left(+\frac{i}{2}\int_t^{t_r} \Delta_N dt\right) |\nu_1, N(t)\rangle \\
&\longrightarrow a_1 \exp\left(+\frac{i}{2}\int_{t'}^{t_r} \Delta_N dt\right) |\nu_1, N(t')\rangle \\
&\quad + a_2 \exp\left(-\frac{i}{2}\int_{t'}^{t_r} \Delta_N dt\right) |\nu_2, N(t')\rangle \\
|\nu_2, N(t_r)\rangle &= \exp\left(-\frac{i}{2}\int_t^{t_r} \Delta_N dt\right) |\nu_2, N(t)\rangle \\
&\longrightarrow -a_2^* \exp\left(+\frac{i}{2}\int_{t'}^{t_r} \Delta_N dt\right) |\nu_1, N(t')\rangle \\
&\quad + a_1^* \exp\left(-\frac{i}{2}\int_{t'}^{t_r} \Delta_N dt\right) |\nu_2, N(t')\rangle
\end{aligned} \tag{7.6}$$

a_1 と a_2 は複素数で, $|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$ を満たす。また,

$$U \equiv \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2^* & a_1^* \end{pmatrix}$$

とおくと U はユニタリー行列である。

(7.6) を $|\nu_1, N(t)\rangle$, $|\nu_2, N(t)\rangle$ を基準とした式にすると

$$\begin{aligned}
|\nu_1, N(t)\rangle &\longrightarrow a_1 \exp\left(-\frac{i}{2}\int_t^{t_r} \Delta_N dt\right) \\
&\quad \times \exp\left(\frac{i}{2}\int_{t'}^{t_r} \Delta_N dt\right) |\nu_1, N(t')\rangle \\
&\quad + a_2 \exp\left(-\frac{i}{2}\int_t^{t_r} \Delta_N dt\right) \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{i}{2}\int_{t'}^{t_r} \Delta_N dt\right) |\nu_2, N(t')\rangle \\
|\nu_2, N(t)\rangle &\longrightarrow -a_2^* \exp\left(\frac{i}{2}\int_t^{t_r} \Delta_N dt\right) \\
&\quad \times \exp\left(\frac{i}{2}\int_{t'}^{t_r} \Delta_N dt\right) |\nu_1, N(t')\rangle \\
&\quad + a_1^* \exp\left(\frac{i}{2}\int_t^{t_r} \Delta_N dt\right) \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{i}{2}\int_{t'}^{t_r} \Delta_N dt\right) |\nu_2, N(t')\rangle
\end{aligned}$$

これらと (7.3) を用いて, 生成された ν_e を ν_e として検出する振幅は

$$\langle \nu_e, N(t') | \nu_e, N(t) \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \{ \langle \nu_1, N(t') | \cos \theta_0 + \langle \nu_2, N(t') | \sin \theta_0 \} \\
&\quad \times \{ \cos \theta_N | \nu_1, N(t) \rangle + \sin \theta_N | \nu_2, N(t) \rangle \} \\
&= A_1(t) \exp \left(\frac{i}{2} \int_{t'}^t \Delta_N dt \right) + A_2(t) \exp \left(- \frac{i}{2} \int_{t'}^t \Delta_N dt \right)
\end{aligned}$$

ここで

$$A_1(t) = \cos \theta_0 \left[a_1 \cos \theta_N \exp \left(- \frac{i}{2} \int_t^{t'} \Delta_N dt \right) \right.$$

$$\left. - a_2^* \sin \theta_N \exp \left(\frac{i}{2} \int_t^{t'} \Delta_N dt \right) \right]$$

$$A_2(t) = \sin \theta_0 \left[a_2 \cos \theta_N \exp \left(- \frac{i}{2} \int_t^{t'} \Delta_N dt \right) \right.$$

$$\left. + a_1^* \sin \theta_N \exp \left(\frac{i}{2} \int_t^{t'} \Delta_N dt \right) \right]$$

生成された ν_e を, ν_e として検出する確率は

$$\begin{aligned}
P_{\nu_e}(t, t') &= |A_1(t)|^2 + |A_2(t)|^2 + |A_1(t)A_2(t)| \\
&\quad \times \left[\exp \left\{ -i \left(-\Omega_1 + \Omega_2 - \int_{t'}^t \Delta_N dt \right) \right\} \right. \\
&\quad \left. + \exp \left\{ i \left(-\Omega_1 + \Omega_2 - \int_{t'}^t \Delta_N dt \right) \right\} \right] \\
&= |A_1(t)|^2 + |A_2(t)|^2 + 2|A_1(t)A_2(t)| \times \cos \left(\Omega - \int_{t'}^t \Delta_N dt \right)
\end{aligned}$$

ここで $A_1(t) \equiv |A_1(t)| \exp(i\Omega_1)$

$A_2(t) \equiv |A_2(t)| \exp(i\Omega_2)$

$\Omega \equiv -\Omega_1 + \Omega_2 = \arg(A_1^* A_2)$

検出位置の平均をとると

$$\begin{aligned}
P_{\nu_e}(t) &= |A_1(t)|^2 + |A_2(t)|^2 \\
&= |a_1|^2 \left\{ \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta_0) \times \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta_N) + \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta_0) \right. \\
&\quad \left. \times \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta_N) \right\} + |a_2|^2 \left\{ \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta_0) \times \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta_N) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta_0) \times \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta_N) \right\} + |a_1 a_2| \left[\cos^2 \theta_0 \sin \theta_N \right. \\
&\quad \left. \times \cos \theta_N \left\{ -2 \cos \left(\omega_1 + \omega_2 - \int_t^{t'} \Delta_N dt \right) \right\} + \sin^2 \theta_0 \sin \theta_N \cos \theta_N \right. \\
&\quad \left. \left\{ 2 \cos \left(\omega_1 + \omega_2 - \int_t^{t'} \Delta_N dt \right) \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (|a_1|^2 - |a_2|^2) \cos 2\theta_N \cos 2\theta_0 - |a_1 a_2| \sin 2\theta_N \cos 2\theta_0 \cos \left(\omega - \int_t^t \Delta_N dt \right)$$

ここで $a_1 \equiv |a_1| \exp(i\omega_1)$

$a_2 \equiv |a_2| \exp(i\omega_2)$

$\omega \equiv \omega_1 + \omega_2 = \arg(a_1 a_2)$

生成位値の平均をとると

$$\langle P_{\nu_e} \rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (|a_1|^2 - |a_2|^2) \cos 2\theta_N \cos 2\theta_0$$

非断熱的な遷移確率を表わす $|a_2|^2$ を P_x とおく。 P_x は、共鳴を通過して $|\nu_1, N\rangle$ から $|\nu_2, N\rangle$ へ、またはその逆へ遷移する確率である。

$$\langle P_{\nu_e} \rangle = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - P_x \right) \cos 2\theta_N \cos 2\theta_0$$

(7.7)

断熱的な場合は、 $P_x = 0$ とすればよい。

ν_e が共鳴のところの電子密度よりはるかに大きな密度のところで作られた場合は、 $\theta_N \approx \frac{\pi}{2}$ であるから、

$$\langle P_{\nu_e} \rangle \approx \sin^2 \theta_0 + P_x \cos 2\theta_0 \tag{7.8}$$

θ_0 が小さいときは、(7.8) は共鳴における遷移確率に等しい。

共鳴を2回通るときの計算も同様である。(ニュートリノが、太陽の反対側のへりで作られたとき)、(7.7) の P_x を $P_{1x}(1 - P_{2x}) + (1 - P_{1x})P_{2x}$ で置き換えればよい。

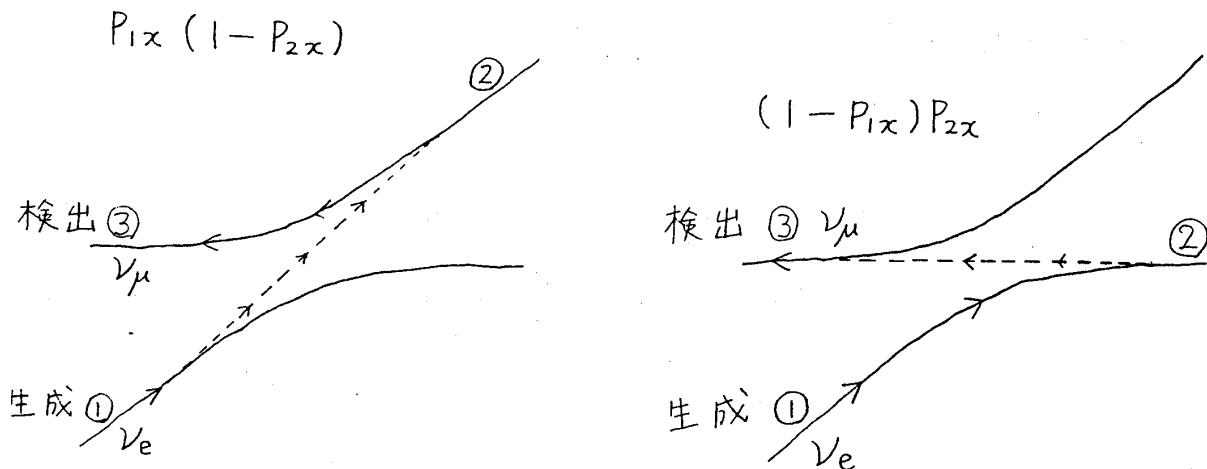


FIGURE 7.1

このように、共鳴領域がいくつあっても適切に平均をとれる。

次に、 P_x を計算する。

共鳴領域が小さいので、電子密度は共鳴領域で線形的に変わるという近似をする。

すなわち、共鳴地点でテーラー展開し、2次以上の項を捨てると

$$N(t) \approx N(t_r) + (t - t_r) \left. \frac{dN}{dt} \right|_{t_r} \quad (7.9)$$

が共鳴近傍で成立する。

この近似において(7.2)の解を求める。¹⁸⁾

$$\varepsilon_1 \equiv \frac{1}{2} (-A_0 \cos 2\theta_0 + \sqrt{2} GN)$$

$$\varepsilon_2 \equiv \frac{1}{2} (A_0 \cos 2\theta_0 - \sqrt{2} GN)$$

$$\varepsilon_3 \equiv \frac{1}{2} A_0 \sin 2\theta_0$$

共鳴のとき $\sqrt{2} GN = A_0 \cos 2\theta_0$ であるから

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} G(t - t_r) \left. \frac{dN}{dt} \right|_{t_r}$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} G(t - t_r) \left. \frac{dN}{dt} \right|_{t_r}$$

よって

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 &= \sqrt{2} G(t - t_r) \left. \frac{dN}{dt} \right|_{t_r} \\ &\equiv \alpha \tau \end{aligned} \quad (7.10)$$

ここで $\tau \equiv t - t_r$

また

$$\frac{d}{dt} |\nu_e\rangle = \frac{d}{dt} |\nu_\mu\rangle = \frac{d}{dt} \varepsilon_3 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} (7.2) \text{ は } H|\nu_e\rangle &= \varepsilon_1|\nu_e\rangle + \varepsilon_3|\nu_\mu\rangle \\ H|\nu_\mu\rangle &= \varepsilon_3|\nu_e\rangle + \varepsilon_2|\nu_\mu\rangle \end{aligned} \right\} \quad (7.2)'$$

$$C_e(t) \equiv C_1(t) \exp(-i \int \varepsilon_1 dt)$$

$$C_\mu(t) \equiv C_2(t) \exp(-i \int \varepsilon_2 dt)$$

とおくと(7.1)は

$$|\nu, t\rangle = C_1(t) \exp(-i \int \varepsilon_1 dt) |\nu_e\rangle \\ + C_2(t) \exp(-i \int \varepsilon_2 dt) |\nu_\mu\rangle$$

シュレーディンガー方程式は

$$\left(H - i \frac{\partial}{\partial t} \right) \{ C_1(t) \exp(-i \int \varepsilon_1 dt) |\nu_e\rangle \\ + C_2(t) \exp(-i \int \varepsilon_2 dt) |\nu_\mu\rangle \} = 0$$

(7.2)' を代入して

$$\left. \begin{aligned} i \frac{d}{dt} C_1 &= \varepsilon_3 \exp\{i \int (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) dt\} C_2 \\ i \frac{d}{dt} C_2 &= \varepsilon_3 \exp\{-i \int (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) dt\} C_1 \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

生成された ν_e が, ν_e として検出される確率 P_x を求めるための境界条件は

$$|C_e(t=-\infty)| = 1 \text{ かつ } C_\mu(t=-\infty) = 0 \quad (7.12)$$

よって $P_x = |C_e(t=\infty)|^2 = |C_1(t=\infty)|^2 = 1 - |C_2(t=\infty)|^2$

(7.11) から C_1 を消去して

$$\frac{d^2}{dt^2} C_2 + \left\{ i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \frac{1}{\varepsilon_3} \left(\frac{d}{dt} \varepsilon_3 \right) \right\} \frac{d}{dt} C_2 + \varepsilon_3^2 C_2 \quad (7.13)$$

ここで

$$C_2(t) \equiv \exp\left\{-\frac{i}{2} \int (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) dt\right\} U_2(t)$$

とおくと

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} C_2 &= -\frac{i}{2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \exp\left\{-\frac{i}{2} \int (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) dt\right\} U_2 \\ &\quad + \exp\left\{-\frac{i}{2} \int (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) dt\right\} \frac{d}{dt} U_2 \\ \frac{d^2}{dt^2} C_2 &= -\frac{i}{2} \left(\frac{d\varepsilon_1}{dt} - \frac{d\varepsilon_2}{dt} \right) \exp\left\{-\frac{i}{2} \int (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) dt\right\} U_2 \\ &\quad - \frac{1}{4} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 \exp\left\{-\frac{i}{2} \int (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) dt\right\} U_2 \\ &\quad - i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \exp\left\{-\frac{i}{2} \int (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) dt\right\} \frac{dU_2}{dt} \\ &\quad + \exp\left\{-\frac{i}{2} \int (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) dt\right\} \frac{d^2 U_2}{dt^2} \end{aligned}$$

これらを (7.13) に代入し, t での微分を τ での微分に直し, $\frac{d}{d\tau} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \alpha$, $\frac{d}{d\tau} \varepsilon_3 = 0$ を用い

ると

$$\frac{d^2 U_2}{d\tau^2} + \left(\epsilon_3^2 - \frac{i}{2} \alpha + \frac{1}{4} \alpha^2 \tau^2 \right) U_2 = 0$$

ここで

$$z \equiv \sqrt{\alpha} \exp\left(-\frac{i}{4} \pi\right) \tau$$

$$n \equiv i \frac{1}{\alpha} \epsilon_3^2$$

と置き換えると

$$\frac{d^2 U_2}{dz^2} + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} z^2 \right) U_2 = 0$$

これは Weber の微分方程式で、放物柱関数 $D_n(z)$ を用いて解の基本系が $D_n(z)$ と $D_{-n-1}(iz)$ または $D_n(-z)$ と $D_{-n-1}(-iz)$ で与えられている。

$D_n(z)$ の漸近展開は、 $|z|$ が充分大きい場合

○ $\pm \frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \pm \frac{5}{4} \pi$ のとき (複合同順)

$$D_n(z) \simeq \left\{ \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) z^2 - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-n)} \exp\left(\pm n\pi i + \frac{z^2}{4}\right) z^{-n-1} \right\} \times \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right\}$$

○ $|\arg z| < \frac{3}{4} \pi$ のとき

$$D_n(z) \simeq \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) z^n \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right\}$$

$\tau \rightarrow -\infty$ のとき (過去の極限; 生成されたとき)

$$\begin{aligned} \alpha > 0 \quad z &= \sqrt{\alpha} \exp\left(-\frac{i}{4} \pi\right) \exp(i\pi) \infty \\ &\equiv \exp\left(\frac{3}{4} \pi i\right) R \quad (R \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha < 0 \quad z &= \sqrt{-\alpha} i \exp\left(\frac{3}{4} \pi i\right) \infty \\ &\equiv \exp\left(\frac{5}{4} \pi i\right) R \\ &= \exp\left(-\frac{3}{4} \pi i\right) R \quad (R \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

$|\arg z| < \frac{3}{4} \pi$ のときの展開を使いたいので

$$\begin{aligned} \alpha > 0 \quad -iz &= -\exp\left(\frac{5}{4} \pi i\right) R \\ &= \exp\left(\frac{\pi}{4} i\right) R \quad (R \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -z &= \exp(-\pi i) \exp\left(\frac{3}{4}\pi i\right) R \\ &= \exp\left(-\frac{\pi}{4}i\right) R \quad (R \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

$$D_{-n-1}(-iz) \simeq \exp\left\{-\frac{1}{4}\exp\left(\frac{\pi}{2}i\right)R^2\right\} \left\{\exp\left(\frac{\pi}{4}i\right)R\right\}^{-n-1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

$$D_{-n}(-z) \simeq \exp\left\{-\frac{1}{4}\exp\left(\frac{3}{2}\pi i\right)R^2\right\} \times \left\{\exp\left(-\frac{\pi}{4}i\right)R\right\}^n \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \text{有限}$$

境界条件より $\tau \rightarrow -\infty$ で $U_2 \rightarrow 0$ であるから, 係数を A_+ とおいて

$$U_2(z) = A_+ D_{-n-1}(-iz)$$

$$\alpha < 0 \quad iz = \exp\left(-\frac{\pi}{4}i\right) R \quad (R \rightarrow \infty)$$

$$\begin{aligned} D_n(z) &\simeq \exp\left(-\frac{i}{4}R^2\right) \left\{\exp\left(-\frac{3}{4}\pi i\right)R\right\}^n \\ &\quad - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-n)} \exp\left(-n\pi i + \frac{i}{4}R^2\right) \left\{\exp\left(-\frac{3}{4}\pi i\right)R\right\}^{-n-1} \\ &\quad \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \text{有限 (第1項が残る)} \end{aligned}$$

$$D_{-n-1}(iz) \simeq \exp\left\{-\frac{1}{4}(-i)R^2\right\} \exp\left\{-\frac{1}{4}(-n-1)\pi i\right\} \times R^{-n-1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

境界条件より, 係数を A_- とおいて

$$U_2(z) = A_- D_{-n-1}(iz)$$

$D_n(-z)$ と $D_{-n-1}(-iz)$ は, どちらも $R \rightarrow \infty$ で有限となり, この組では解けない。

$$\begin{aligned} C_2 &= \exp\left(-\frac{i}{2} \cdot \frac{1}{2} \alpha \tau^2\right) A_{\pm} D_{-n-1}(\mp iz) \\ &\simeq A_{\pm} \exp\left(\mp \frac{i}{2} R^2\right) \exp\left\{\mp \frac{i}{4}(n+1)\pi\right\} R^{-n-1} \end{aligned}$$

(7・11) より

$$\begin{aligned} C_1 &= i \frac{1}{\varepsilon_3} \exp\left\{i \int (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) d\tau\right\} \frac{dC_2}{d\tau} \\ &= i \frac{1}{\varepsilon_3} \exp\left(i \frac{\alpha}{2} \tau^2\right) \frac{dC_2}{d\tau} \\ &= i \frac{1}{\varepsilon_3} \exp\left(\pm \frac{i}{2} R^2\right) \frac{dC_2}{d\tau} \end{aligned} \tag{7・14}$$

ここで $R = \sqrt{|\alpha|} \tau = -\sqrt{|\alpha|} \tau$ であるから

$$\frac{d}{d\tau} = -\sqrt{|\alpha|} \frac{d}{dR} \text{ を用いて}$$

$$\frac{dC_2}{d\tau} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \pm i A_{\pm} \exp\left(\mp \frac{i}{2} R^2\right) \exp\left\{\mp \frac{i}{4} (n+1)\pi\right\} \times R^{-n} \sqrt{|\alpha|}$$

(7.14)へ代入

$$C_1 \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \mp \frac{1}{\varepsilon_3} A_{\pm} \exp\left\{\mp \frac{i}{4} (n+1)\pi\right\} R^{-n} \sqrt{|\alpha|}$$

境界条件 $|C_1(\tau = -\infty)| = 1$ より

$$|A_{\pm}| = \frac{|\varepsilon_3|}{\sqrt{|\alpha|}} \exp\left(\mp \frac{1}{4} \frac{\varepsilon_3^2}{\alpha} \pi\right)$$

$$= \frac{|\varepsilon_3|}{\sqrt{|\alpha|}} \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{\varepsilon_3^2}{|\alpha|} \pi\right)$$

ここで $r \equiv \frac{\varepsilon_3^2}{|\alpha|}$ とおくと

$$|A_{\pm}| = r^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\pi}{4} r\right) \quad (7.15)$$

$\tau \rightarrow +\infty$ のとき (未来の極限; 検出される時)

それぞれの α について, $\tau \rightarrow -\infty$ での C_2 と解析接続しなければいけない。

$$\begin{aligned} \alpha > 0 \quad D_{-n-1}(-iz) &\simeq \exp\left(-\frac{i}{4} R^2\right) \exp\left\{\frac{3}{4} \pi \times (n+1) i\right\} R^{-n-1} \\ &\quad + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(n+1)} \exp\left(\frac{i}{4} R^2\right) \exp\left(\frac{i}{4} n\pi\right) \times R^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha < 0 \quad D_{-n-1}(iz) &\simeq \exp\left(\frac{i}{4} R^2\right) \exp\left\{-\frac{3}{4} \pi \times (n+1) i\right\} R^{-n-1} \\ &\quad + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(n+1)} \exp\left(-\frac{i}{4} R^2\right) \times \exp\left(-\frac{i}{4} n\pi\right) R^n \end{aligned}$$

$$\text{よって } D_{-n-1}(\mp iz) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(n+1)} \exp\left(\pm \frac{i}{4} R^2\right) \times \exp\left(\pm \frac{i}{4} n\pi\right) R^n$$

(7.15) を用いて

$$\begin{aligned} |C_2(\tau = \infty)|^2 &= r \exp\left(-\frac{\pi}{2} r\right) \frac{2\pi}{|\Gamma(n+1)|^2} \exp\left(\pm \frac{i}{2} n\pi\right) \\ &= \frac{2\pi r \exp(-\pi r)}{\Gamma(i\gamma+1) \Gamma(-i\gamma+1)} \\ &= 2 \exp(-\pi r) \sinh(\pi r) \\ &= 1 - \exp(-2\pi r) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
 P_x &= |C_1(\tau=\infty)|^2 \\
 &= \exp(-2\pi r) \\
 \text{ここで } r &= \frac{\varepsilon_3^2}{|\alpha|} = \frac{\varepsilon_3^2}{\left| \sqrt{2} G \frac{dN}{dt} \Big|_{t_r} \right|} = \frac{\frac{1}{4} \Delta_0^2 \sin^2 2\theta_0}{\left| \frac{1}{N} \Delta_0 \cos 2\theta_0 \frac{dN}{dt} \Big|_{t_r} \right|}
 \end{aligned}$$

であり, $\Delta_0 > 0$, $\cos 2\theta_0 > 0$ (仮定より) であるから

$$P_x = \exp \left[-\frac{\pi}{2} \frac{\sin^2 2\theta_0}{\cos 2\theta_0} \frac{\Delta_0}{\left| \frac{1}{N} \frac{dN}{dt} \Big|_{t_r} \right|} \right] \quad (7.16)$$

(7.16) から, 遷移領域の大きさを決めることができる。

遷移が起こる時の, 2つの固有値の差の最大値は $\Delta_0 \sin 2\theta_{\text{critical}}$ で, 遷移領域は $\Delta_N < \Delta_0 \sin 2\theta_{\text{critical}}$ である。(Δ_N は2つの固有値の差)

$$\frac{\delta N}{N(t_r)} = \frac{\delta E}{E} = \frac{\Delta_N}{\Delta_0} \quad (7.17)$$

と考えると (7.17) より

$$\frac{\delta N}{N(t_r)} = \frac{\Delta_0 \sin 2\theta_{\text{critical}}}{\Delta_0} = \sin 2\theta_{\text{critical}}$$

これと (7.9) をあわせて

$$\frac{\delta N}{N(t_r)} = \frac{(t - t_r) \frac{dN}{dt} \Big|_{t_r}}{N(t_r)} = \sin 2\theta_{\text{critical}}$$

よって

$$|t - t_r| = \frac{\sin 2\theta_{\text{critical}}}{\left| \frac{1}{N} \frac{dN}{dt} \Big|_{t_r} \right|}$$

これが, 遷移領域の大きさである。

(7.9) のテーラー展開は, $\sin 2\theta_{\text{critical}}$ での展開であるから, θ_{critical} が小さければ良い近似であることがわかる。

太陽における電子の密度は, 中心近くを除いて, exponential の形で減衰する。

$$\begin{aligned}
 N &= N_c \exp \left\{ -\frac{1}{R_s} C(t - t_0) \right\} \\
 &= N_c \exp \left(-\frac{R}{R_s} \right)
 \end{aligned}$$

ここで N_c : ν_e が生成されるところの電子数密度 140 g/cm^2

R_s : 図の縮尺 $0.092 \times R_\odot$

R : ν_e の生成位置からの距離

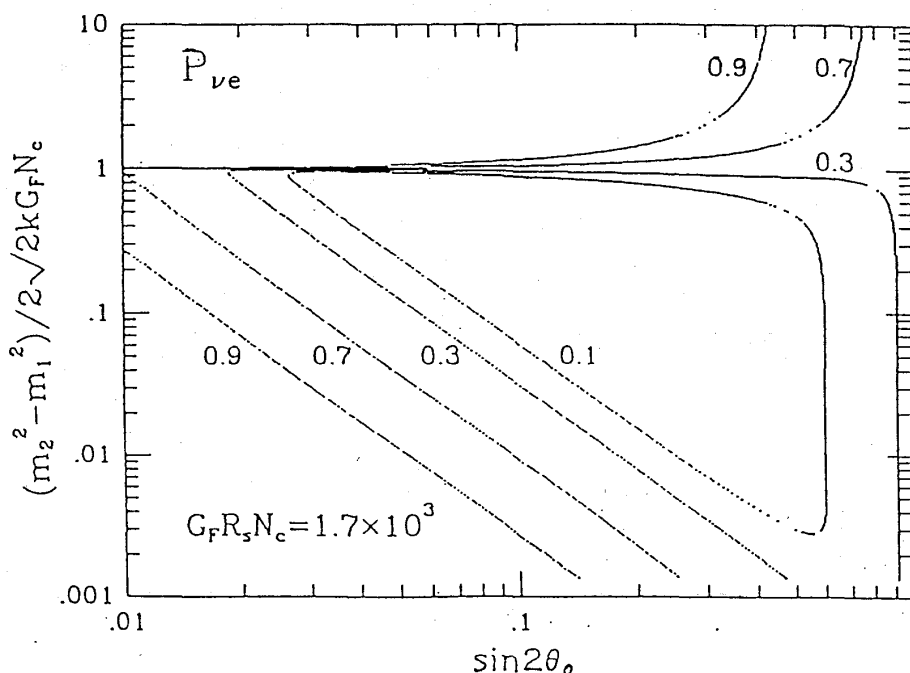
t_0 : ν_e が生成された時刻

Y_e : 物質中の1核子あたりの電子の数 0.7 とする

$GN_c R_s = 1.7 \times 10^3$ に固定して, ν_e を地球で検出する確率を描くと図 7.2

S. J. Parke, Phys. Rev. Lett. 57, 1275 (1986)

FIGURE 7.2



このように, 確率が 0.1 と 0.3 の場合は, 等確率の点を結ぶとほぼ三角形になる。

水平な線の左の方は, 断熱的な $P_x = 0$ を示す。 $\sin 2\theta_0 \leq 0.1$ ぐらいでは, $\cos 2\theta_0 \approx 1$ とみなし,

$$\langle P_{\nu_e} \rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta_N.$$

水平な線の右上へ発散する部分は, 横軸 $x = \sin 2\theta_0$, たて軸 $y = \frac{A_0}{\sqrt{2} GN_c}$ とおくと, $A_0 \cos 2\theta_0 = \sqrt{2} GN$ より $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ を示すと考えられる。

垂直な線は, 物質中での mixing angle が大きい場合を示す。 ν_e は共鳴の充分上で生成されるから $\theta_N = \frac{\pi}{2}$ とおけて $\langle P_{\nu_e} \rangle = \sin^2 \theta_0 + P_x \cos 2\theta_0$, ここへ $\cos 2\theta_0 \approx 0$ を代入して $\langle P_{\nu_e} \rangle \approx \sin^2 \theta_0$ 。

ななめの線は, 非断熱的な場合の P_x 一定の線を示す。(7.16)より

$$-\frac{\pi}{2} \frac{\sin^2 2\theta_0}{\cos 2\theta_0} \frac{A_0}{\left| \frac{1}{N} \frac{dN}{dt} \right|_{t_r}} = -\frac{\pi}{2} \frac{\sin^2 2\theta_0}{\cos 2\theta_0} \times \frac{A_0}{GN_c} \times GN_c R_s = \text{一定}$$

この対数をとると

$$2\ell_{nx} + \ell_{ny} + \ell_n \left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}} G N_c R_s \right) - \ell_n \cos 2\theta_0 = \text{const.}$$

$\theta_0 \approx 0$ のときは

$$\ell_{ny} = -2\ell_{nx} + \text{const.}$$

よって, ななめの線の傾きは -2 。

図 7.2 より, 図 7.3 の概形が理解できる。

図 7.2 のたて軸は $\frac{1}{k}$ に比例, つまり E に反比例している。よって, 図 7.2 の三角形をたて軸に平行に切った断面は, 図 7.3 のようになる。図 7.3 の左側の, 確率の急な減少は図 7.2 の三角形の水平な線の間隔が詰まっていることに対応する。つまり, 図 7.3 の左側は断熱的なニュートリノ振動による確率の減少を示す。

図 7.3 の右側の, 確率のゆるやかな増大は, 図 7.2 のななめの線の間隔が開いていることに対応する。つまり, 非断熱的なニュートリノ振動による確率の増大を示す。

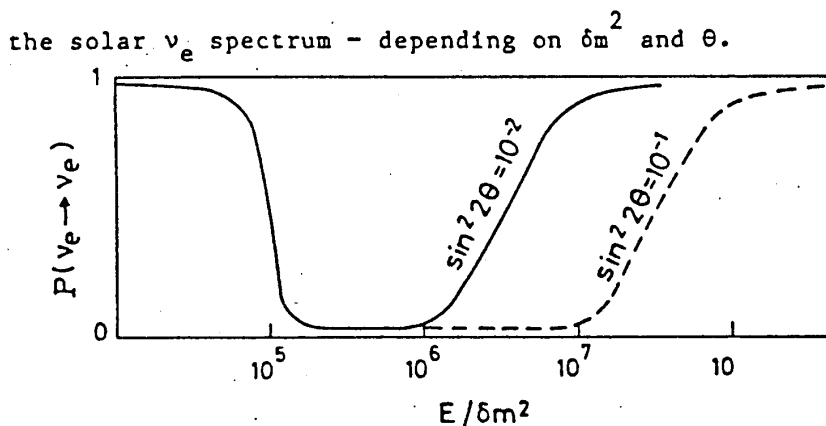


FIGURE 7.3 Sketch of the MSW transmission factor for $\sin^2 2\theta = 10^{-2}$ and 10^{-1} .

R.J.N. Phillips, RAL-87-075

パラメーター θ_0 , θ_N の値はわからないし, (7.9) のような近似を用いているが, この理論に致命的な問題点はないと思われる。よって, Solar Neutrino Puzzle の解であるかもしれない。

8章 ニュートリノに磁気モーメントがある?

ニュートリノが磁気モーメントを持っていて, 太陽の磁場との影響で検出される割合が減るのではないかと, という考え方もある。

ニュートリノに磁気モーメントがあるのではないかと と言われる理由として

- ニュートリノの capture rate と太陽の黒点数の逆相関が言える。
- 季節によってニュートリノの capture rate に変化がある。

などが挙げられるが, いずれもまだはっきりとは確認されていないので, ニュートリノに磁気モーメントがあるかはわからない。磁気モーメントを持つとして, ニュートリノ振動を考える理論も出ている。実験

を続けることによって、将来確認されるであろう。興味のある問題である。

9章 結 論

以上、Puzzleの原因を解析してきたが、その結果 Puzzleの原因は、物質中のニュートリノ振動により、 ν_e が ν_μ や ν_τ に変化した、というのが我々の結論である。(ニュートリノ振動が起こるためにはニュートリノに質量があり mixing が起こることが必要)

10章 将来の実験

現在、ニュートリノをつかまえるさまざまな実験が計画中であるが、近い将来にそれらの実験によって Solar neutrino puzzle が解けることを期待し、ここにそれらを紹介しておく。

将来の実験

基本過程	Threshold (MeV)	生成源	グループ
${}^{71}\text{Ga} + \nu_e \longrightarrow {}^{71}\text{Ge} + e$	0.2	PP	GALLEX ¹⁹⁾ , SAGE ²⁰⁾
$\nu + e \longrightarrow \nu + e$	5 ~ 10	${}^8\text{B}$	LVD, University of Sydney/Canada/USA/England
$\nu_e + {}^{11}\text{B} \longrightarrow \nu_e + {}^{11}\text{B}$	3	${}^8\text{B}$	BOREX ²¹⁾
${}^{115}\text{In} + \nu_e \longrightarrow {}^{115}\text{Sn} + e$	0.1	PP, (${}^7\text{Be}$)	England French ²²⁾
${}^{81}\text{Br} + \nu_e \longrightarrow {}^{81}\text{Kr} + e$	0.5	${}^8\text{B}$, ${}^7\text{Be}$	Pennsylvania and Tennessee ²³⁾
${}^{98}\text{Mo} + \nu_e \longrightarrow {}^{98}\text{Tc} + e$	2	${}^8\text{B}$	LANL ²⁴⁾
${}^{40}\text{Ar} + \nu_e \longrightarrow {}^{40}\text{K} + e$	5	${}^8\text{B}$	Icarus ²⁵⁾
$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \nu_e + \text{D} \longrightarrow \text{P} + \text{P} + e \\ \textcircled{2} \nu + e \longrightarrow \nu + e \\ \textcircled{3} \nu + \text{D} \longrightarrow \nu + \text{p} + \text{n} \end{array} \right.$	5	${}^8\text{B}$	SNO ²⁶⁾

①は ν_e のみを測定、②は $\nu_e : \nu_\mu : \nu_\tau$ を約6:1:1で主に ν_e を測定するが、③は ν_e, ν_μ, ν_τ を等しい割合で測定。D₂Oの中のDを用いる。

参考文献

- 1) R. Davis et al, Phys. Rev. Lett. 20, 1205 (1968)
- 2) R. J. N. Phillips, RAL-87-075
- 3) 戸塚洋二 ミュンヘン国際会議での報告 (1988年11月)

- 4) J. N. Bahcall et al, Rev. Mod. Phys. 54, 767 (1982)
- 5) J. N. Bahcall, R. M. May, Astrophys. J. 155, 501 (1969)
- 6) 桜井邦朋 月刊フィジクス Vol. 7 No. 9 (1986)
- 7) 佐藤文隆, 原哲也著 宇宙物理学 (朝倉書店)
- 8) E. Segrè著 Nuclei and Particles (the benjamin/cummings publishing)
- 9) J. N. Bahcall, R. K. Ulrich Rev. Mod. Phys. 60, No. 2, 297 (1988)
- 10) 阿部和雄 月刊フィジクス Vol. 7 No. 9 (1986)
- 11) 高杉英一 同 上
- 12) 中川昌美 同 上
- 13) H. A. Bethe, Phys. Rev. Lett. 56, 1305 (1986)
- 14) L. Wolfenstein, Phys. Rev. D 20, 2634 (1979)
- 15) M. Gell-Mann, P. Ramond, and R. Slansky, in Supergravity, edited by P. van Nieuwenhuizen and D. Z. Freedman (North-Holland, Amsterdam, 1979)
- 16) T. Yanagida, in Proceedings of the Workshop on Unified Theory and Baryon Number of the Universe, Tsukuba, Ibaraki, Jappan, 1979 (unpublished)
- 17) S. J. Parke, Phys. Rev. Lett. 57, 1275 (1986)
- 18) C. Zener, Proc. Roy. Soc. A127, 696 (1932)
- 19) T. Kirsten, Proceedings of the Ninth Workshop on Grand Unification, Aix-les-Bains (1988)
- 20) A. I. Abazov et al. contributed paper # 0397D
- 21) R. S. Raghavan and S. Pakvasa, Phys. Rev. D37, 849 (1988)
- 22) R. S. Raghavan, Phys. Rev. Lett. 37, 259 (1976);
N. E. Booth et al, AIP Conf. Proc. No.126, p. 216 (1984);
A. de Bellefon et al, ibid p.227
- 23) G. S. Hurst et al, Phys. Rev. Lett. 53, 1116 (1984)
- 24) G. S. Hurst et al, Phys. Rev
- 25) J. N. Bahcall, M. Baldo-Ceolin, D. Cline and C. Rubbia, Phys. Lett. 178B, 324 (1986)
- 26) G. T. Ewan et al., (Queens Univ.)
SNO-85-3, (1985)

最後に、よきご指導をして下さった菅本先生に厚くお礼申し上げます。また、協力して下さった大学院生の丸井さん、KEKの谷森さん、都立大学の布川さんに感謝いたします。