4 非カノニック形式の粒子力学における量子化理論について

下瀬恒人，藤田長子（お茶の水女子大）

序　言

粒子及び波動場の力学系を量子化する理論は，20数年前 Dirac, Heisenberg 等によつて，非カノニック形においては原則的に完成された。しかし最近二つの典型的な方法が非カノニック形式における量子化について提案された。一つは粒子の軌道を中心とする Feynman の理論[1)2)]であり，他は変分原理を中心とする Schwinger の理論[3)4)]である。我々はこれらの量子化理論及び古典力学における Lagrang形式と Hamilton 形式との関係を調べている途中で，一つの新しい非カノニック形式における量子化の方法を得た。この方法の特徴は，粒子の空間座標からパラメーター座標への変換が unitary 変換であるとの要求を課した点である。本理論は勿論上述の二理論と密接に結びついているが，そのどちらとも見解を異にしている。本文では我々のこの新しい方法で粒子力学の量子化を論じよう。

§1　Feynman及びSchwingerの量子化理論と著者の見解

この節では，Feynman及びSchwinger の理論の量子化の仮定と方法を検討して，これらと関係の深い我々の見解を明らかにしたい。この際，我々の方法を明らかにすることに重点を置くので，量子化についての議論は，一粒子が一次元的に運動している粒子力学の領域のみに限る。

Feynman の理論[1)2)]の概要

彼の理論は，粒子の運動としてあらゆる可能な軌道を取り，各軌道に対して次の二つの仮定を課している。

1) 各軌道に附随した確率振幅亜の位相は，その軌道に沿って取つた作用積分 S に比例する。

$$\Phi = e^{\frac{i}{\hbar}S} \tag{1}$$

たゞし

$$S = \int_{t_0}^{t} L(q, \dot{q}, t)\, dt \tag{2}$$

2) 各軌道の確率振幅に対して重畳の原理が成立し，ある点Pから他の点Qへの遷移確率Pは次式で与えられる。

$$P = \Big| \sum_{\text{すべての軌道}} \Phi \Big|^2 \tag{3}$$

この Feynman の理論では，粒子の軌道の概念が導入されたので，量子化理論と古典力学との関係の密接さがかなりの程度まで明かにされた。しかし(3)式に現れているすべての軌道についての和を求めることが実際上困難の為，この方法によって取扱われるべき問題の可能な範囲は大いに制限される。Feynman[2] は更に ordered operator の計算を発展させて上記の和の求め方を簡単に示した。我々の新しい量子化の方法は，この ordered operator の例の中で多くの suggestion を得た。

我々は Feynman の理論から軌道の概念を取上げよう。しかし各軌道に附随した作用積分の位相は Schwinger の理論より取ったより基本的な原理から導こう。

Schwinger の理論[4]の概要

彼は変分原理を，次の二つの仮定で規定した。

1) 作用積分Sの変分は，境界域における変分の影響を考慮して作る。

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t} L\, dt = \int_{t_0}^{t} \delta L\, dt + \Big| L\, \delta t \Big|_{t_0}^{t}$$

$$= \int_{t_0}^{t} \Big\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Big) \Big\} \delta q\, dt + \Big| p\Delta q + (L - p\dot{q})\delta t \Big|_{t_0}^{t}$$

こゝで $\Delta q = \delta q + \dot{q}\,\delta t \qquad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$

もし軌道が運動方程式を満足するならば，

$$= \Big| p\Delta q + (L - p\dot{q})\delta t \Big|_{t_0}^{t} \tag{4}$$

2) 変換函数 $\langle q''(t_2) | q'(t_1) \rangle$ と上に述べた変分との関係は，次式で規定される。

$$\Delta \langle q''(t_2) | q'(t_1) \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle q''(t_2) | \Delta S(t_2 t_1)\, q'(t_1) \rangle \tag{5}$$

Schwingerの理論の上述の量子化過程1)は，Dyson[5)]が指摘しているように，不確定性原理と密接な関係があるが，不確定性原理そのものは，原理的なものでなく，より基本的原理（例えば p, q の交換関係）から導くべきである。又，Schwingerは作用積分の変分 δS を作るとき，通常の力学の見解に従つて，粒子座標の変分 δq の他に座標 q の実質変分 Δq を導入して，

$$\Delta q = \delta q + \dot{q}\,\delta t \tag{6}$$

なる関係を導入したが，これは我々の見解の出発点となつている。

Schwingerはこの関係の解釈にHamilton形式の意義を附加して，「$\Delta q = 0$ の場合には新しいoperatorと古いoperatorの固有値は同一であつて，δq の変化は系の運動を行うことに基づく固有値の自然変化を丁度打消している。」と述べているが，この他には更に解釈を発展させていない。

最後に，Schwingerは，境界領域における変分を用いて，operator q の無限小unitary変換として次の様な関係を導いた。

$$i\hbar\,\delta q = [q,\ p\Delta q - (p\dot{q} - L)\delta t] \tag{7}$$

後で我々の結果はこの式と一致することを示そう。

我々はこの(6)の関係に重点を置き，次節では(6)式に対して，粒子座標 q の軌道パラメーター群への無限小変換

$$\delta q = \delta Q + \dot{q}\,\delta t$$

なる式を対応させた。こゝで Q は軌道パラメーター（$\alpha, \beta, \cdots$）又はこれらのパラメーターと時間 t との函数である。

この(7)式は上述の意味では粒子の座標と軌道のパラメーター群との間の交換関係を定める式に過ぎないが，この変換に対して〝(7)式で規定される変換は無限小unitary変換である。″ということを要求すると，この関係の説明に対して重要な変化が起る。この要求が満足されると同時に，量子化の過程が行われて，量子化に特有な交換関係が決定されることを次節で示そう。

以上の考察から分るように，我々の見解では，まず粒子の軌道概念を

取上げ，そして Lagrange 形式から Hamilton 形式への座標の変換を軌道の概念と結びつけ，更にこの軌道への変換と unitary 変換を結びつけることによって，量子化理論と組織づけんとするものである。

§2 古典力学における Lagrange 形式と Hamilton 形式の相互関係

古典力学における Lagrange 形式の力学変数と Hamilton 形式のそれとの間の区別を明かにする為に、又それを次節の非カノニック形式における量子化の準備とするために，まず Feynman の量子化理論に従って，粒子の一次元運動を粒子の軌道の時空記述を中心として考察しよう。

同一力学的状況下にある粒子の古典的運動の軌道群を Lagrange 形式で記述する為，その粒子の座標 q の時間的変化を軌道により区別して

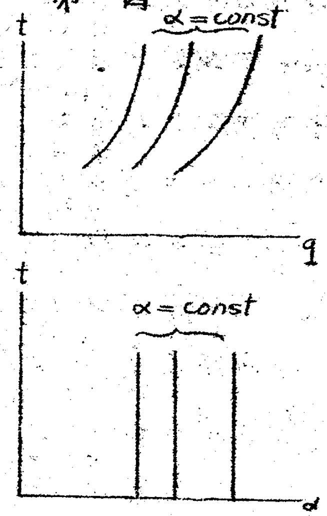
$$q = q(\alpha, t) \qquad (1)$$

で表わす。こゝに α は軌道の区別を示すパラメーターで，たとえば粒子の初期の位置又は速度である。

今，次の変換を考える。

$$(q, t) \rightarrow (\alpha, t) \qquad (2)$$

第一図



この変換により $(q-t)$ 平面上の軌道曲線群は $(\alpha-t)$ 平面上では t 軸に平行な直線群に変換される（第一図）。この変換のある程度具体的表現を得る為に，その無限小変換の性質を明かにしよう。この無限小変換は q の変分をとつて次のように規定される。

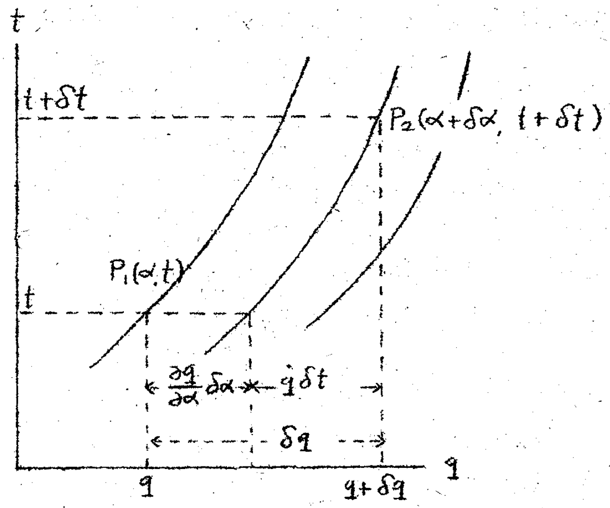
$$\delta q \; \frac{\partial q}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial q}{\partial t}\delta t \qquad (3)$$

(3)式の示す変分 δq の意義を考えよう。$q-t$ 平面において，δq は異る近接した軌道 $(\alpha, \alpha+\delta\alpha)$ 上の二点 $P_1(\alpha, t)$, $P_2(\alpha+\delta\alpha, t+\delta t)$ の間の q の差である。右辺の第一項，第二項は，夫々第二図に示してある。

次に(3)式の $\frac{\partial q}{\partial \alpha}$ が t を explicit に含まないときは(3)式は Schwinger の

(1·6)と等しく，$\frac{\partial q}{\partial \alpha}$ がαとtに関係するときは最後にSchwingerの(1·7)の形に変形される。

第二図



Case I $\frac{\partial q}{\partial \alpha}$ がαのみの函数でtを含まないとき

この場合に対しては次のような新しい変数Qを導入する。

$$Q=\int^{\alpha} f(\alpha)d\alpha$$

但し $\frac{\partial q}{\partial \alpha}=f(\alpha)$

(3)式は

$$\delta q=\delta Q+\dot{q}\,\delta t \qquad \dot{q}=\frac{\partial q}{\partial t} \tag{4}$$

となる。この式はSchwingerの変分原理における関係と比較すると，後者は(4)式で$\delta q\rightarrow\Delta q$，$\delta Q\rightarrow\delta q$とおきかえたものである。Schwingerの理論ではこの関係がLagrange変数とHamilton変数の間の関係を決定している。それ故本文では，この関係はSchwingerのものと同一の意味をもつが，変数に対しては異った表現を用いる。即ちLagrange変数は小文字，Hamilton変数は大文字で示す。

Case II $\frac{\partial q}{\partial \alpha}$ がαとtに関係するとき

この場合は$\frac{\partial q}{\partial \alpha}=\frac{\partial Q}{\partial \alpha}$として新しい変数$Q(\alpha,t)$を導入する。但し$\frac{\partial Q}{\partial t}$は定まらない。無限小変換は

$$\delta q(\alpha,t)=\frac{\partial q}{\partial \alpha}\delta\alpha+\dot{q}\,\delta t$$
$$=\delta Q+(\dot{q}-\dot{Q})\,\delta t$$

又は

$$\delta q-\dot{q}\,\delta t=\delta Q-\dot{Q}\,\delta t \tag{5}$$

(4)式と(5)式は古典力学におけるLagrange変数とHamilton変数との関係を示している。これらの関係は古典力学では重要な役割を持たないが，量子化された理論では様子が全く異ってくる。

§3 非カノニック形式における量子化理論

Lagrange 変数 q と Hamilton 変数 Q の間の古典的な関係 (2.5) から出発して，これらの変数の量子化理論へ進まう。そこではすべての operator は unitary 変換として変換される。よく知られているように，operator Q と Q_0 との間の unitary 変換が，変換函数 U によつて

$$Q = U Q_0 U^{-1}$$

の如く表現されるときには，単位のまわりの無限小変換

$$U = 1 + iF$$

に関しての operator Q の無限小 unitary 変換は

$$\delta Q = i[F, Q] \qquad (こゝで\ Q = Q_0 + \delta Q) \tag{1}$$

として表わされる。一方 (2.5) の関係は

$$\delta Q = (\delta q - \dot{q}\,\delta t) + \dot{Q}\,\delta t \tag{2}$$

と書かれる。

量子化理論に進む為に，(2)式が(1)式と同じ形を持つことを要求しなければならない。そこで

「無限小変換(2)は無限小 unitary 変換であつて，(1)の形をとる。」

ということを要求しよう。この要求を実行するには二つの方法がある。一つは Hamilton 形式で，一つは Lagrange 形式である。両方法は(2.5)が q と Q に関して対称の形をしているので対称である。

Hamilton 形式における量子化

(1)式と(2)式を等しくする為に，次のような交換関係を満足する二つの新しい operator P と L を導入しよう。

$$[P, Q] = \frac{\hbar}{i} \qquad [L, Q] = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial Q}{\partial t} \tag{3}$$

すると，(2)式は次のようにして無限小 unitary 変換となる。

$$i\hbar\,\delta Q = [Q,\ P\delta q - P\dot{q}\,\delta t + L\,\delta t\,] \tag{4}$$

勿論(1)式に

$$F = -\frac{1}{\hbar}\left[\,P(\delta q - \dot{q}\,\delta t) + L\,\delta t\,\right] \tag{5}$$

を代入しても(4)式を得る。このようにすると(1)式と(2)式は同じである。

(4)式はSchwingerの変分原理から得られた(1·7)式と比較される。そうすると，Schwinger と同じ関係式が変分法を用いないで我々の方法で得られたことが分る。たゞし我々の記号では Lagrange 変数と Hamilton 変数が Lagrange 形式での運動方程式に少し変化を与えるであろう。

Schwingerの理論では unitary 変換函数の変分と系を量子化する(1·5)の如き作用積分との間の関係を仮定として規定している。これに対して我々の理論では，量子化に対する概念は座標の変換に重きをおいているので，量子化の過程は(3)式と(4)式にある。このSchwinger の理論と我々の方法とを比較すると，前述の過程は量子化の過程に他ならないことが容易に理解されるであろう。

次に変分 δt，δq，δQ の特別な場合を論じよう。

特別な変分

Case 1　$\delta t=0$ と仮定する。これは $t=\text{const.}$ な面での operator のずれに対応する。このとき簡単に $\delta Q=\delta q$ を得る。そこで(4)式から再び Q と P との交換関係を得るのである。

Case 2　$\delta q=0$ として Heisenberg 表示の場合を検討しよう。このとき(5)式から次の関係を得る。

$$i\hbar Q=[H,Q]\delta t \qquad ここで\ H=P\dot{q}-L \tag{6}$$

又は

$$i\hbar\frac{dQ}{dt}=[H,Q]$$

これはよく知られている如く Heisenberg 表示による運動方程式である。(6)式が $\delta q=0$ の條件の下で時代的変化に対する operator Q の全微分を定めているのに対して，(3)式の後者は operator Q の偏微分を表わしている。

Case 3　(4)式に対して更に特別な場合

$$\delta q=\dot{q}\,\delta t \qquad 且つ \qquad \delta Q=\dot{Q}\,\delta t$$

を考えよう。この場合に対しては(4)式より

$$i\hbar\frac{\partial Q}{\partial t}=[Q,L] \tag{7}$$

を得る。これは又(3)の後者と同じである。

Lagrange 形式における量子化

第三の場合は Lagrange 形式ではない。 pure Lagrange 形式の量子化された形を得る為に、もう一つの方法を考えよう。 この場合には q と交換しない二つの operator P と L' を

$$[P, q] = \frac{\hbar}{i} \qquad [L', q] = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial q}{\partial t} \tag{8}$$

を導入すると、(4)式は次のようになる。

$$i\hbar\delta q = [q, P\delta Q - (P\dot{Q}L')\delta t] \tag{9}$$

特別な変分

Case 4　$t = \mathrm{const}$ なる面に対して $\delta t = 0$ を得る。 すると、(2)式又は(5)式より $\delta q = \delta Q$ を得る。

$$[P, q] = \frac{\hbar}{i}$$

なる関係に注意すると、同じく $\delta q = \delta Q$ を得る。

Case 5.　pure Lagrange 形式として $\delta Q = 0$ なる條件の下に特別の変分を取上げる。 (9)式より

$$i\hbar\delta q = [q, P\dot{Q} - L']\delta t$$

又は

$$i\hbar\frac{dq}{dt} = [q', H'] \qquad \text{こゝで } H' = PQ' - L' \tag{10}$$

を得る。

Case 6　もし(2)の関係に対して

$$\delta q = \dot{q}\delta t \qquad \text{かつ} \qquad \delta Q = \dot{Q}\delta t$$

とおけば

$$i\hbar\frac{\partial q}{\partial t} = [q, L']$$

を得る。 この Case 6 は Case 3 と同じである。 併し(7)式が Q の時間変化を記述しているのに反して (11) 式は q の時間変化を記述している。

§4　古典力学における二つのパラメーターを持つた軌道群とその量子化。(Lagrange 函数が高次微分を含む場合の一例)

粒子の一次元の運動に関する考察に関聯してその粒子の軌道を二つの

パラメーターをもった軌道群として表わされる場合を取扱う。

古典力学では或る時間に各軌道に対する q と $\dot{q}$ の分布が次の如くに与えられるとする。

$$\begin{cases} q = q(\alpha, \beta, t) \\ \dot{q} = \dot{q}(\alpha, \beta, t) \end{cases} \qquad (1)$$

二つの異った軌道 α, β と $\alpha+\delta\alpha$, $\beta+\delta\beta$ との上の接近した任意の二点 $P_1(\alpha, \beta, t)$, $P_2(\alpha+\delta\alpha, \beta+\delta\beta, t+\delta t)$ を考えると，これらの二点の間の q の変分 δq と $\dot{q}$ の変分 $\delta\dot{q}$ は次の如くに表わされる。

$$\begin{cases} \delta q = \dfrac{\partial q}{\partial\alpha}\delta\alpha + \dfrac{\partial q}{\partial\beta}\delta\beta + \dot{q}\,\delta t \\ \delta\dot{q} = \dfrac{\partial\dot{q}}{\partial\alpha}\delta\alpha + \dfrac{\partial\dot{q}}{\partial\beta}\delta\beta + \ddot{q}\,\delta t \end{cases} \qquad (2)$$

$\dfrac{\partial q}{\partial\alpha}$ ---- 等が α, β, t に関聯している一般的な場合を考える。併し一般性を失うことなしに次の制限を加える。

$$\frac{\partial\dot{q}}{\partial\alpha} = 0 \quad かつ \quad \frac{\partial q}{\partial\beta} = 0 \qquad (3)$$

こゝで次の如き新しい変数を導入しよう。

$$\frac{\partial q}{\partial\alpha} = \frac{\partial Q_1}{\partial\alpha} \quad かつ \quad \frac{\partial\dot{q}}{\partial\beta} = \frac{\partial Q_2}{\partial\beta}$$

又は，

$$\begin{cases} \delta Q_1(\alpha, t) = \dfrac{\partial Q_1}{\partial\alpha}\delta\alpha + \dot{Q}_1\delta t = \dfrac{\partial q}{\partial\alpha}\delta\alpha + \dot{Q}_1\delta t, \\ \delta Q_2(\beta, t) = \dfrac{\partial Q_2}{\partial\beta}\delta\beta + \dot{Q}_2\delta t = \dfrac{\partial\dot{q}}{\partial\beta}\delta\beta + \dot{Q}_2\delta t. \end{cases} \qquad (4)$$

(2)式に対し

$$\begin{cases} \delta Q_1 = \delta q - \dot{q}\,\delta t + \dot{Q}_1\delta t \\ \delta Q_2 = \delta\dot{q} - \ddot{q}\,\delta t + \dot{Q}_2\delta t \end{cases} \qquad (5)$$

を得る。

<u>量子化理論</u>

上述の力学系を量子化する為に

「(5)式が無限小 unitary 変換である」

ことを要求する。この要求は

$$[P_i, Q_i] = \frac{\hbar}{i} \qquad [L, Q] = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial Q_i}{\partial t} \qquad (i=1,2) \tag{6}$$

の形に表わされる三つの operator P, Q, L を導入し, かつ(5)式を次の様におきかえる。

$$\begin{cases} \delta Q_1 = \frac{i}{\hbar}[(P_1(\delta q - \dot{q}\delta t) + L\delta t), Q_1], \\ \delta Q_2 = \frac{i}{\hbar}[(P_2(\delta \dot{q} - \ddot{q}\delta t) + L\delta t), Q_2]. \end{cases} \tag{7}$$

P_1 と Q_2, 又 P_2 と Q_2 が互に交換可能であることを考え, 又 operator F を次の如く導入すると

$$F = \frac{i}{\hbar}\{P_1\delta q + P_2\delta \dot{q} - (P_1\dot{q} + P_2\ddot{q} - L)\delta t\}, \tag{8}$$

(7)式は

$$\delta Q_i = i[F, Q_i] \qquad (i=1,2) \tag{9}$$

と表わされ, operator Q_1 と Q_2 は無限小 unitary 変換となる。

更に(3.6)式 — (3.11)式のようにして議論を進めることが出来る。このとき Hamiltonian H は

$$H = P_1\dot{q} + P_2\ddot{q} - L$$

とかゝれる。これは q の二次微分を含む Lagrange 函数に対するよく知られた Hamiltonian である。

(本文は 10 月末の物理学会でその概要を報告したものである)

文　　献

1) Feynman, R. P: Rev. Mod. Phys. 20 367 (1948)
2) Feynman, R. P: Lectures on "Quantum Electrodynamics and Methon Theories" (1951);
Phys. Rev. 84 108 (1951).
3) Schwinger, J: Phys. Rev. 82 914 (1951).
4) Schwinger, J: Lectures on "Quantum Theory on Fields" (1950)
5) Dyson, F. J: Lectures on "Advanced Quantum Mechanics" (1951).